Musterabitur IUS D1

von Daniel Roth

www.mathetrauma.net

Analysis

BE

Teil 1

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (e^x - 2)^2$ mit Definitionsmenge IR. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

3 **1. a)** Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

4 **b)** Ermitteln Sie die Wendetangente von G_f .

(zur Kontrolle: $f''(x) = 4e^x \cdot (e^x - 1)$ *)*

3 **c)** Zeigen Sie, dass G_f und die durch die Gleichung $y = 4$ gegebene Gerade g genau einen Schnittpunkt $S(x_S | y_S)$ besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. *(Teilergebnis:* $x_S = 2 \ln 2$ *)*

3 **2. a)** Bestimmen Sie einen Funktionsterm für eine Funktion, die unendlich viele Berührpunkte mit der x-Achse hat.

3 **b)** Bestimmen Sie einen Funktionsterm für eine Funktion mit einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei x = 4 und die die Winkelhalbierende als Asymptote besitzt.

4 3. Gegeben sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion h(x) = $\ln(2x + 3) + x$ und berechnen Sie die Nullstelle mit Hilfe des Newtonverfahrens zum Startwert $x_0 = -0{,}5$

BE

Teil 2

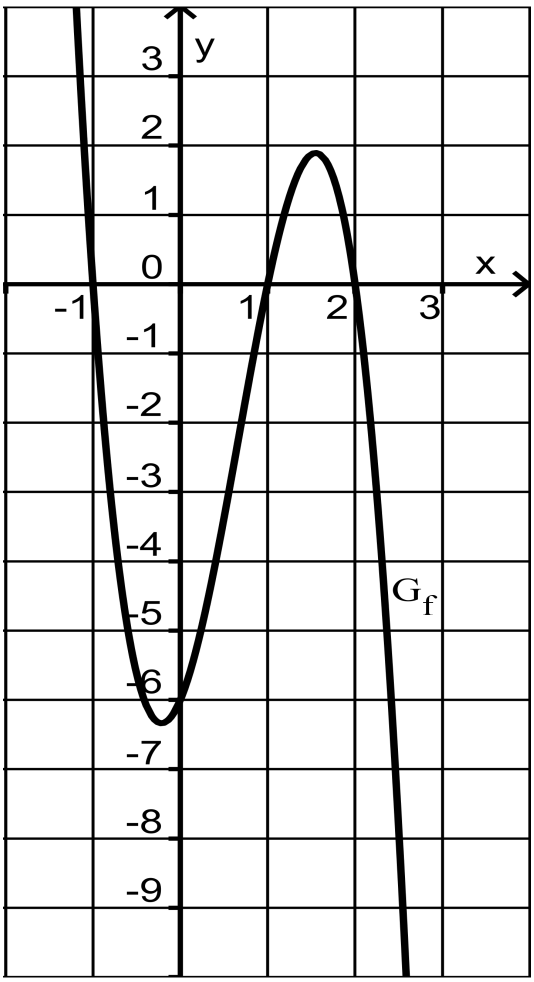
1. Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(4 - x^2)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g . Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

7 a) Zeigen Sie, dass $D_g =]-2; 2[$ gilt, und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_g an. Bestimmen Sie die Nullstellen von g sowie das Verhalten von g an den Rändern von D_g .

5 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_g .

2 c) Skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

2. Gegeben ist die in $I\!R$ definierte Funktion $f: x \mapsto -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$, die die Nullstellen 1, –1 und 2 besitzt. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



5 a) Die Tangente t an G_f im Punkt $(1|0)$ legt mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten ein Dreieck fest. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt A.

[Ergebnis: $A = 3$]

7 b) Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke, die G_f mit der x-Achse einschließt.

[Ergebnis: Flächeninhalte: 8 und 1,25]

Betrachtet wird nun die in IR definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

4 c) Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von F, dass F genau eine Nullstelle hat.

5 d) Welche Funktionswerte von F lassen sich aus den in Teilaufgabe 2b berechneten Flächeninhalten ermitteln? Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_F an.

5 e) Ermitteln Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 2a berechneten Flächeninhalts A einen Näherungswert für F(0). Skizzieren Sie G_F in der Abbildung zu Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

40

Stochastik

An einem Musikwettbewerb, der aus einer Messehalle bundesweit live im Fernsehen übertragen wird, nehmen zwölf Nachwuchsbands aus ganz Deutschland teil. Genau zwei davon, München Motel und Bavarian King, stammen aus Bayern.

1. Die Bewertung der Auftritte der ersten Runde erfolgt mithilfe einer Zuschauerabstimmung im Internet. Jeder Zuschauer kann höchstens einmal abstimmen und muss zur Abgabe seines Votums genau drei von ihm favorisierte Bands auswählen. Bei 41 % der zahlreich abgegebenen Voten wird mindestens eine bayerische Band ausgewählt, München Motel bei 31 % und Bavarian King bei 22 % der Voten.

   4 a) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde München Motel ausgewählt." und „Bei einem zufällig betrachteten Votum wurde Bavarian King ausgewählt." stochastisch unabhängig sind.

   6 b) Unter allen Zuschauern, die ein Votum abgaben, werden 20 Freikarten für ein Konzert der späteren Siegerband verlost. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei der 20 ausgelosten Zuschauer Bavarian King auswählten.

2. Die Auftritte der zweiten Runde bewerten die Zuschauer durch eine telefonische Abstimmung. Dabei können bei jedem Anruf 1000 Euro gewonnen werden; die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt jeweils 0,02 %.

   4 a) Die bei jedem Anruf anstehende Entscheidung, ob ein Gewinn erzielt wird oder nicht, soll für 800 nacheinander ankommende Anrufe simuliert werden. Beschreiben Sie ein dafür geeignetes Urnenexperiment.

   6 b) Ein Zuschauer möchte durch mehrfaches Anrufen seine Chance auf einen Gewinn vergrößern. Welchen Betrag müsste er wenigstens investieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal zu gewinnen, wenn jeder Anruf 50 Cent kostet?

3. Für das Finale der beiden bisher am besten bewerteten Bands haben sich München Motel und Bavarian King qualifiziert. Nach deren Finalauftritten entscheiden die Zuschauer im Rahmen einer erneuten telefonischen Abstimmung über den Sieger des Wettbewerbs; bei jedem Anruf ist nur der favorisierte Finalist zu nennen. Bevor die bereits feststehende Entscheidung bekannt gegeben wird, wird die Sendung ein letztes Mal für einen längeren Werbeblock unterbrochen. Für die Hallen- und Fernsehzuschauer wird unmittelbar vor dieser Werbeunterbrechung folgende Graphik eingeblendet (die zu den Anteilen gehörenden Bandnamen werden bewusst noch nicht angezeigt).

   Ein Fan von München Motel vermutet, dass seine Band schließlich als Sieger ausgezeichnet wird. Da er sich nicht bis zur Bekanntgabe der Entscheidung gedulden will, nutzt er die Unterbrechung, um seine Vermutung zu testen. Dazu befragt er 25 der zahlreichen Hallenzuschauer und lässt sich von diesen den jeweils favorisierten Finalisten nennen.

   2 a) Geben Sie zwei mögliche Gründe dafür an, dass diese Befragung nicht geeignet sein könnte, die Vermutung des Fans zu testen.

5 b) Der Fan testet schließlich die Nullhypothese „München Motel hat höchstens 40% der Stimmen“ auf dem Signifikanzniveau von 10%. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel unter der Annahme, dass die Befragung geeignet ist, die Vermutung des Fans zu testen.

3 c) Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen des Fehlers 2ter Art.

30

Geometrie

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(-3|-3|0)$ und $S(0|0|6)$ gegeben.

4 1. a) Das Dreieck ABC liegt in der x_1x_2-Ebene. Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist, und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.

[Teilergebnis: Flächeninhalt: 13,5]

3 b) Die Punkte A, B und S legen die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

3 c) Berechnen Sie den Abstand d des Punkts C von der Ebene E.

[Ergebnis: $d = 6$ *]*

Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide. Zeichnen Sie diese in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

2. In einem Geländemodell stellt die Pyramide einen Berg mit Gipfel S dar; das Dreieck CAS bildet die Südseite, der Rand des Dreiecks ABC den Fuß des Bergs. Der Berg soll, ausgehend von seinem Fuß, auf einer geraden Linie bestiegen werden.

4 a) Wo muss gestartet werden, damit der Weg zum Gipfel im Geländemodell einen möglichst kleinen Neigungswinkel gegen die x_1x_2-Ebene hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Länge des zugehörigen Wegs im Modell.

8 b) An welchem Punkt muss gestartet werden, wenn der geradlinige Weg zum Gipfel auf der Südseite verlaufen und möglichst kurz sein soll? Bestimmen Sie im Geländemodell die Koordinaten dieses Punkts sowie den Neigungswinkel φ des zugehörigen Wegs gegen die x_1x_2-Ebene.

2 **3.** a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

3 b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABS gleich groß sind.

3 c) Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die parallel zur Ebene E verläuft und von dieser den Abstand 3 hat.

30