Das Stochastik Mitmachscript

bearbeitet von

____

mehr Informationen und Arbeitsblätter unter www.mathe-roth.de

gestaltet von Daniel Roth

1. Das Zufallsexperiment, der Begriff der Wahrscheinlichkeit

Ein Experiment, bei dem mehrere Ergebnisse möglich sind heißt Zufallsexperiment. Die möglichen Ergebnisse werden zu einem Ergebnisraum Ω zusammengefasst. Der einfachste bekannte Fall ist der Würfel. Für den Würfel gilt:

$\Omega = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Die Größe des Ergebnisraums, die Anzahl der möglichen Ergebnisse wird durch Betragsstriche angegeben. Im Fall des Würfels gilt:

$| \Omega | =$

Das Experiment ist nicht mehr determiniert, man kann nicht einfach sagen, was passiert, sondern nur was passieren könnte. Aber man kann trotzdem etwas aussagen. Man kann von der Wahrscheinlichkeit sprechen, dass etwas passiert, zum Beispiel, dass eine 5 gewürfelt wird. Dies wird durch folgende Formel ausgedrückt:

P(„Es wird eine 5 gewürfelt“) =

Gelesen: „

Ziel der Stochastik ist es die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse eines Zufallsexperimentes aus zurechnen.

Von einer Wahrscheinlichkeit verlangt man gewisse Regeln, Axiome genannt. Zuerst formuliert man sie in der Alltagssprache, um sie dann formal auszudrücken. Ereignisse, wie das Ereignis, dass eine 5 gewürfelt wird oder, dass eine gerade Zahl kommt kürzt man durch Großbuchstaben, A, B, C,... ab. In der Alltagssprache werden Wahrscheinlichkeiten in % angegeben und liegen zwischen 0 % und 100 %. In der Mathematik teilt man die %-Zahlen durch 100, so dass eine Wahrscheinlichkeit immer zwischen 0 und 1 liegt. Auf diese Weise werden auch alle echten Brüche, bei denen der Zähler kleiner als der Nenner ist zu Wahrscheinlichkeiten. Allgemein benutzten wir den Parameter p für eine Wahrscheinlichkeit. Ergänzen Sie:

%-Zahl	70	4	28	22,34	0,6	100	0	99,9	z
p									

Zu jedem Ereignis A lässt sich ein Gegenereignis $\bar{A}$, gelesen __________ - formulieren. Das Gegenereignis stellt man sich am besten in Form einer Wette vor. Wenn zwei Spieler um etwas wetten, setzt der eine auf ein Ereignis zum Beispiel A: „Ich werde mindestens 4 mal die Tontaube treffen“, während der andere dagegen hält $\bar{A}$: „Du wirst höchstens dreimal treffen“. Die Wahrscheinlichkeiten, P(A) und P($\bar{A}$) ergänzen sich immer zu 1.

P(A)	0,2	0,99	1/3		2/5	1	p	23,4 %
P($\bar{A}$)				4/11				

Ereignisse können miteinander verbunden sein. Dafür werden in der Stochastik spezielle Zeichen verwendet. A und B seien zwei Ereignisse. Wir führen ein:

$A \cap B$ gelesen „A und B“
$A \cup B$ gelesen „A oder B“ oder „Mindestens eins von A und B“

Entsprechend werden die folgenden Zeichen gelesen:

$P(\bar{A})$	gelesen	"Die Wahrscheinlichkeit, dass nicht A"
$P(A \cap B)$	gelesen	"Die Wahrscheinlichkeit, dass
$P(A \cup B)$	gelesen	
P( )	gelesen	"Die Wahrscheinlichkeit, dass weder A noch B eintritt"

* Theoretische Vertiefung (wenn Mathematik nicht zu den wichtigsten Betätigungen Ihres Lebens gehört, dann machen sie daraus eine Versenkung)
Drei Axiome werden von jeder Wahrscheinlichkeit P verlangt:

A1: A2: A3:

Diese Axiome heißen *Kolmogoroff-Axiome*. A1 bedeutet, dass jede Wahrscheinlichkeit über 0 liegt. A2, dass die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eins der möglichen Ergebnisse von Ω passiert, 1 oder 100% ist. A3 bedeutet, dass ich die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt, addieren kann, wenn A und B sich nicht überschneiden. Aus diesen Axiomen läßt sich der *Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit* ableiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Die Laplaceformel

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißt *Laplaceexperiment*. Bei einem solchen Experiment kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E nach der *Laplaceformel* ausrechnen:

P(E) =--- = --

Ein Beispiel: Zu jedem HappyMeal gibt es eine von 5 Actionfiguren, zwei davon habe ich bereits. Wenn mir ein Freund, der sich nicht mit den Figuren auskennt, eine weitere Figur bringt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich sie noch nicht habe . Die günstigen Ergebnisse können auch unangenehm sein. Wenn ich mit 11 Menschen in einem Schloss gefangen bin, und sich unter uns ein Massenmörder befindet, der jede Nacht zufällig eine Person umbringt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich in der ersten Nacht getötet werde = ,was ungefähr 9% entspricht.

Zufallsexperimente kommen aus dem Glücksspiel, aus dem heraus sich die Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt hat. Zu den bekanntesten Laplaceexperimenten gehören:

-
-
-
-
-
-

a) Der Laplacewürfel

Der faire, nicht gezinkte sechsseitige Würfel wird als *Laplacewürfel* bezeichnet, da beim Würfeln alle Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben liegen bleiben. Die Größe des Ergebnisraumes ist $|\Omega| = 6$. Mit der Laplaceformel kann man die Wahrscheinlichkeiten von folgenden Ereignissen berechnen:

E: "gerade" P(E) = F: „mehr als 4" P(F) =

G: „Primzahl" P(G) = H: „mehr als 6" P(H) =

b) Die Urne

2 schwarz
2 weiß
1 gelb

Ein Gefäß, aus dem gleich große Kugeln zufällig gezogen werden, wird *Urne* genannt. In oberem Gefäß kann ich für $\Omega = \{ \quad , \quad , \quad \}$ eintragen, aber dann ist der Ergebnisraum aber nicht ____________________. Daher denken wir uns jede Kugel unterschieden und notieren uns nur die Größe des Ergebnisraums $|\Omega| =$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten bei **einmal ziehen**.

A: „Schwarz" P(A) =

B: „Gelb" P(B) =

C: „Nicht weiß" P(C) =

D: „Farbe" P(D) =

** (nicht lesen, wenn allergisch auf philosophische Kommentare). Bei der letzen Wahrscheinlichkeit gehts nicht um die Mathematik, sondern darum, was es bedeutet, dass etwas eine Farbe ist. Wissenschaftltlich gesprochen, müssen wir die Bedeutung der Begriffe klären, um uns zu verständigen. Zwanghafte Menschen geben solche Fragen gerne an Autoritätspersonen (Eltern, Chef, Physiker) weiter, denn die Spielregeln müssen jawohl klar sein! Etwas demokratischer geht es zu, wenn wir uns darüber unterhalten, was wir meinen.

Wird zweimal gezogen, ist die Wahrscheinlichkeit für die zweite Kugel von der ersten abhängig. Wurde eine gelbe Kugel gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel = 0,5. Die Wahrscheinlichkeit erst eine gelbe und dann eine schwarze zu ziehen ergibt sich insgesamt zu: P(„Erst Gelb und dann Schwarz") = . Da auch noch verlangt wird, welche Farbe die zweite Kugel hat, wird die Wahrscheinlichkeit ________________. Wettet jemand jedoch darauf, dass eine gelbe und eine schwarze Kugel gezogen werden, so hat er zwei Chancen, da er nicht auf eine Reihenfolge gesetzt hat, seine Gewinnwahrscheinlichkeit ergibt sich zu
P(„Erst Gelb und dann Schwarz oder erst Schwarz und dann Gelb") =

** Bei der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit begibt sich die Mathematikerin auf eine imaginierte Zeitreise: Sie steht vor der Urne und zieht erst Gelb und dann Schwarz, Gewinn! Jetzt dreht sie die Zeit zurück und steht wieder vor der Urne, diesmal zieht sie erst Schwarz und dann Gelb, Gewinn! Dies macht sie so oft, bis sie in jede mögliche Zukunft, bei der sie gewinnt, gereist ist.

Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit beim **zweimaligen Ziehen** aus oberer Urne:

A: „Zwei Schwarze“ P(A) = B: „Zwei Gelbe“ P(B) =

C: „Zwei Gleiche“ P(C) = D: „Keine Weiße“ P(D) =

E: „Mindestens eine Weiße“ P(E) = F: „Die zweite ist gelb“ P(F) =

Wird die erste Kugel gezogen, die Farbe notiert und die Kugel dann zurückgelegt, und dann wieder gezogen, so spricht man vom **Ziehen mit Zurücklegen**. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die obigen Ereignisse in diesem Fall.

P(A) = P(B) = P(C) =

P(D) = P(E) = P(F) =

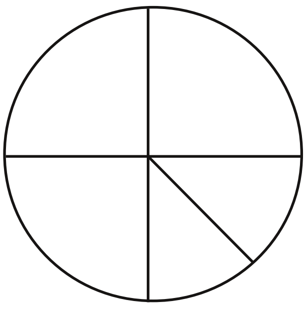
c) Die Laplacemünze
Eine faire Münze heißt Laplacemünze, es gilt: P(„Kopf“) = P(„Zahl“) =
Wirft man die Münze mehrfach, so kann man das Experiment durch ein Urnenexperiment _________________. Dazu gibt man in die Urne die Kugeln _____ und _________.

Berechnen Sie für den dreifachen Münzwurf:

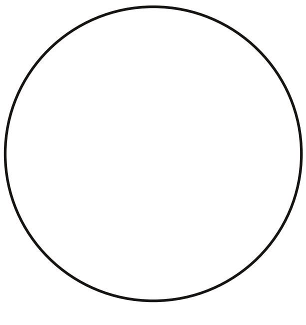
P(„Immer Zahl“) = P(„Mindestens ein Kopf“) =

P(„Zwei mal Zahl“) = P("Die erste Zahl") =

d) Das Glücksrad („Laplaceisieren“)
Ein Glücksrad sieht folgendermaßen aus:
a)



b)



Offensichtlich sind die Felder bei a) nicht Laplaceverteilt. Man kann das Glücksrad jedoch gedanklich verändern um ein Laplacerad b) daraus zu machen. Das nennt man *Laplacesisieren*. Jetzt kann man die Wahrscheinlichkeiten für die drei Farben Blau, Grün und Rot mit der Laplaceformel ausrechnen.

3. Die relative Häufigkeit

Eine Forscherin mischt zwei Flüssigkeiten X und Y, die sie eigens entwickelt hat, zusammen um einen neuen Farbstoff zu erzeugen. Das erste Experiment ergibt eine blaue Flüssigkeit. Das zweite ebenso. Bei dem dritten jedoch wird die Flüssigkeit rot. Insgesammt wiederholt sie das Experiment 80 mal. Dabei taucht auch die Farbe gelb auf. Insgesamt wird der Farbstoff 42 mal rot, 22 mal blau und 16 mal gelb. Dies nennen wir die absoluten Häufigkeiten. Die relative Häufigkeit berechnet sich indem man die absoluten Häufigkeiten durch alle Versuche (Spiele) teilt:

Tick, Trick und Track spielen Tontaubenschießen. Sie schießen jeweils 10, 14 und 16 mal. Tick trifft zweimal, Trick 3 mal und Track 4 mal. Berechnen sie die relativen Häufigkeiten der Treffer.

rH("Tick") = rH("

Ein Laplacewürfel wird 10 mal geworfen, dabei kommt die 6 vier mal. Die relative Häufigkeit ist also rh("6") = während die Wahrscheinlichkeit für eine 6 immer noch p = ist.

Der Schweinewürfel ist nicht _______________. Da es physikalisch noch unmöglich ist die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, bestimmt man sie über die relativen Häufigkeiten. Die relativen Häufigkeiten werden als Schätzer für die Wahrscheinlichkeit hergenommen. Man hat die Wahrscheinlichkeit aus der ___________ abgeleitet, im Gegensatz zur Laplaceformel, bei der die Wahrscheinlichkeit aus der ___________ stammt.

** Die relative Häufigkeit ist zwar nicht die Wahrscheinlichkeit, aber sie ist eine Schätzung, die umso besser ist, je öfter ein Versuch (Spiel) durchgeführt wurde. Das wird *Gesetz der großen Zahlen* genannt. Führt man einen Versuch unendlich oft durch so bekommt man genau die Wahrscheinlichkeit, aber dazu fehlt oft die Zeit.

4 Die Verteilung, der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung

Wenn man ein Zufallsexperiment übersichtlich darstellen möchte, fertigt man eine Tabelle an, in der man einträgt, was passieren kann - mit X bezeichnet, hier geht es häufig ums Geld - und mit welcher Wahrscheinlichkeit - mit P bezeichnet - es passiert. Dazu ein Beispiel. Ein freiberuflicher Journalist, weiß aus Erfahrung, dass er in einer Woche zu 5% zwei Aufträge und zu 70% einen Auftrag im Wert von 400€ bekommt. Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* sieht dann so aus:

X (Was passiert)	Kein Auftrag 0€		
P (Wahrscheinlichkeit)			

Der *Erwartungswert* ist der Wert, mit dem der Journalist „im Mittel“ rechnen kann. Er berechnet sich so

E(X) =

Langfristig kann der Journalist mit dem Erwartungswert rechnen.

Die *Varianz* gibt an, wie stark die Werte gestreut sind. Sie berechnet sich zu:

Var(X) =

Die *Standardabweichung* schließlich ist einfach die Wurzel aus der Varianz, und damit auch eine Streuung.

$\sigma = \sqrt{Var(X)} =$

In einer Urne befinden sich 8 weiße und zwei rote Kugeln. Bei einem Spiel werden zwei Kugeln gezogen. Sind beide rot, so ergibt sich der Hauptgewinn von 10€, ist eine rot so erhält die Spielerin 1€. Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung und beurteilen Sie, ob das Spiel bei einem Einsatz von 1€ fair ist.

X (Was passiert)

* Die Bedeutung von Varianz und Standardabweichung wird an folgendem Beispiel klar. Bei einem Aktienkauf in Höhe von 100€ sei die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Aktie für 120€ nach einem Jahr verkaufen kann 30%, sonst bleibt es bei den 100€. Eine Option 10 Aktien (das sind die riskanten Dinger), nach einem Jahr für 100€ verkaufen zu dürfen kostet 54€. Zeigen Sie, dass beide Geschäfte beim Gewinn den gleichen Erwartungswert haben, aber andere Standardabweichungen, überlegen Sie warum? (und vergessen Sie nicht, dass Aktien auch fallen können).

Fachbegriffe Kapitel 1 bis 4 - erste Woche

Zufallsexperiment - Ein Expriment mit verschiedenen möglichen Ausgängen.

Ergebnisraum - Zusammenfassung aller der Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment möglich sind.

Wahrscheinlichkeit - Zahl zwischen 0 und 1, die ausdrückt, wie wahrscheinlich ein Ereignis ist.

Laplaceexperiment - Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

Laplaceformel - Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Laplaceexperiemneten, bei der die für mich günstigen Möglichkeiten durch alle Möglichkeiten geteilt werden.

Relative Häufigkeit - Quotient aus der Anzahl der Treffer/Gewinne und der Anzahl aller Spiele/Versuche, kann als Schätzung für die Wahrscheinlichkeit hergenommen werden, wenn oft genug gespielt wird.

Verteilung - Übersicht aller Ergebnisse eines Zufallsexperiment mit Angabe der Wahrscheinlichkeiten.

Erwartungswert - Wert, den ich im Mittel langfristig bei einem Zufallsexperiement erwarten kann.

Varianz/Standardabweichung - Streuungsmaße.

Urne - Gefäß mit Kugeln, die beim Ziehen nicht unterschieden werden können.

Gegenereignis zu A - Ereignis, dass eintritt wenn A nicht eintritt, mit $\bar{A}$ bezeichnet, es gilt $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Arbeitsblatt Stochastik 1 - Aufgaben zu den Kapiteln 1 bis 4

Anleitung zu den Arbeitsblättern: Bearbeiten Sie alle Aufgaben, kontrollieren Sie mit Hilfe der Lösungen, ob sie richtig sind und heften Sie die bearbeiteten Aufgaben ab. Wenn Sie sich bei einer Lösung unsicher sind können Sie sie mir abgeben. Wenn Sie Hilfe von mir oder anderen Schülern brauchen, lassen Sie sich zuerst alles erklären. Danach bearbeiten Sie die Aufgabe alleine. Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben mit liebevoller Sorgfalt, um Ruhe und Sicherheit zu gewinnen. (Diesen Angaben ist nicht unbedingt Folge zu leisten, sie sind meine Empfehlungen, falls sie das Abitur bestehen wollen. Sollten Sie aus einem andern Grund hier sein (Zeugenschutz, Übergangsphase, ect.), dann überlegen Sie in Ruhe, was von diesem Kram Sie vielleicht wirklich interssieren könnte.)

1. Aus dem Wort „RENAISSANCE“ werde zufällig ein Buchstabe ausgewählt. Geben sie zuerst den Ergebnisraum Ω = {….} und die Größe des Ergebnisraumes |Ω| an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) das A gewählt wird　　b) das I gewählt wird
c) ein Konsonant gewählt wird　　d) R oder N gewählt wird

2. Die Glückswand
In einem Fernsehquiz befinden sich hinter einer Glückswand verschiedene Felder. Wenn eine Zahl aufgedeckt wird bekommt man den Betrag ausbezahlt. Geben sie die Größe des Ergebnisraums |Ω| an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse, wenn ein Feld umgedreht wird:

/	200€	/	1000€
200€	/	1000€	/
10 000€	/	/	200€
/	/	200€	200€

A: „10 000 €“　　B: „200 €“　　C: „höchstens 200 €“
D: „mindestens 1000€“　　E: „einen Geldgewinn“　　F: "Applaus"

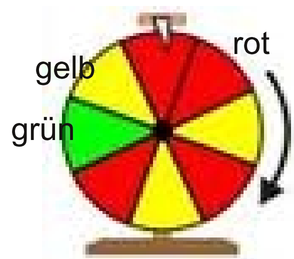
3. Jetzt wird das Spiel an obiger Glückswand abgeändert. Wenn man einen Geldgewinn bekommt so darf man nochmal ein weiteres Feld umdrehen. Den Betrag aus beiden Feldern hat man dann gewonnen. Es ergibt sich folgende Verteilung

X	0€	200€	400€	1000€		2000€	10000€	10200€	11000€
P	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{15}$			$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{60}$

a) Vervollständigen Sie die Tabelle, kürzen sie dabei die Brüche
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert, den mittleren Gewinn mithilfe eines Rechners

4. Nebenstehendes Glücksrad wird einmal gedreht. Geben sie den Ergebnisraum Ω = {….} und die Größe des Ergebnisraumes |Ω| an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

a) A: Rot　　b) B: Gelb oder Grün
c) C: Nicht Grün oder Rot　　d) D: Linie



5. Jetzt wird das Glücksrad zweimal gedreht. Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit zweimal die gleiche Farbe zu bekommen bei 13/32 liegt.

6. In einer Urne liegen eine weiße und eine schwarze Kugel. Wird die weiße Kugel gezogen, so wird sie zurückgelegt und vier weitere weiße werden dazugelegt. Wird die schwarze gezogen wird sie ebenfalls zurückgelegt und vier schwarze Kugeln kommen hinzu.

a) Welche möglichen Urneninhalte liegen nach einem Zug vor?

b) Nun wird zweimal nach obigem Muster gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen gleich viele weiße und schwarze Kugeln in der Urne?

c) Was kann mit diesem Urnenexperiment simuliert werden? (Mit jemandem darüber reden)

7. Die Außerirdischen befinden sich auf dem Weg zur Erde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der erste Kontakt
a) an einem Montag b) zwischen 2 und 4 Uhr Nachmittags c) an einem Feiertag stattfinden.

8. Um ein Betäubungsmittel an Nashörnern zu testen werden 9228 Nashörner abgeschossen. Bei 802 wirkt das Mittel letal. Ermitteln sie die relative Häufigkeit für eine tödliche Wirkung.

9. Ein Würfel wird 200 mal gewürfelt. Dabei ergeben sich folgende absolute Häufigkeiten: Die 1 kam 23mal, die 2 38mal, die 3 33mal, die 4 30mal, die 5 36mal und die 6 40mal. Berechnen sie die relativen Häufigkeiten und erklären Sie warum sich nicht immer 1/6 ergibt. (Das ist die Wahrscheinlichkeit, die sich aus der Laplaceformel ergibt.)

10. Herr K möchte Klarheit über seine Finanzen gewinnen. Dazu will er die mittleren Kosten für einen einfachen Weg zur Arbeit ermitteln. Bei schönem Wetter (20% Wahrscheinlichkeit) geht er grundsätzlich zu Fuß. In der Hälfte aller Fälle nimmt er die U-Bahn (2,40 €), jedes vierte mal (25%) den Bus (1,50 €). In den restlichen Fällen leistet er sich ein Taxi (14€). Fertigen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, und ermitteln Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

11. Ein Unternehmensberater setzt für die Zufallsgröße X: „Anzahl der täglichen Systemabstürze“ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung als Planungsgrundlage an:

X	0	1	2	3
P	0,67	0,25	0,05	0,03

Erstellen Sie ein Diagramm und berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X.

12.* Eine Zufallsgröße X hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b

Wie groß sind die Werte a und b, wenn die Zufallsgröße X den Erwartungswert 1,8 hat?

Grundwissen:Dreisatz (Ja, Grundwissen kann jederzeit, überall und immer abgefragt werden, auch im Abitur. Rechnen Sie also mit Grundwissenskontrollen, ähnlich wie in der U-Bahn).
Die Arbeitslosenquote liegt in der BRD zur Zeit bei 7%, dies entspricht etwa 3 Millionen Menschen.
a) Wie viele Menschen sind erwerbsfähig
b) Wie hoch ist der Prozentsatz der Erwerbsfähigen an der Gesamtbevölkerung, wenn man davon ausgeht, dass in der BRD 80 Millionen Menschen leben?

5 Zwei Ereignisse, das Baumdiagramm

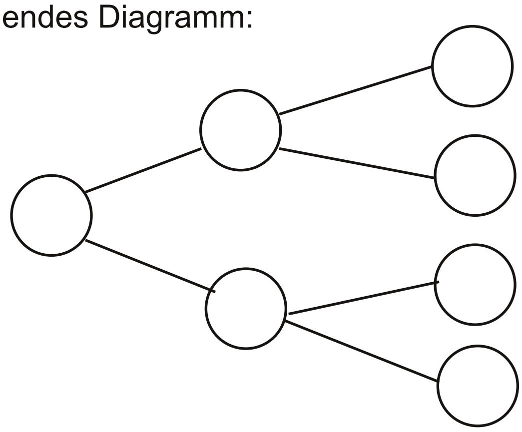
Ereignisse können miteinander verbunden sein, indem sich ein Ereignis auf das andere bezieht. Stellen wir uns eine Firma vor, und sei W das Ereignis „weiblich“, B das Ereignis „wurde befördert“. Dann wollen wir drei Wahrscheinlichkeiten unterscheiden:

$P(B)$	Anteil der Beförderten, bezogen auf die ganze Firma
$P(W \cap B)$	Anteil der beförderten Frauen, bezogen auf die ganze Firma
$P_W(B)$	Anteil der beförderten, bezogen nur auf die Frauen

Im Sprachgebrauch wird die %-Rechnung verwendet. In einer Firma etwa arbeiten 30% Frauen. Man sagt auch, dass 30% der Mitarbeiter Frauen sind. Dieses wird in der Mathematik durch Multiplikation mit der Wahrscheinlichkeit ausgedrückt.

Alltagssprache: Mathematik:

Nun sind die Hälfte aller Frauen in dem Unternehmen befördert worden: 50% von 30%. Das rechnet man folgendermaßen: $0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$. Die 15% sind Frauen, die befördert wurden, also Mitarbeiter die sowohl Frauen als auch befördert worden sind. Bei Männern kann man entsprechend rechnen. Nehmen wir an, dass 20% der Männer schon befördert wurden. Eine komplette Übersicht bekommt man durch ein *Baumdiagramm*. Bezeichnen wir die Ereignisse. W steht für weiblich, M für männlich, B für befördert und $\overline{B}$ für nicht befördert. Dann ergibt sich folgendes Diagramm:



Für den Baum gelten zwei *Pfadregeln*:

1. Es wird entlang der Äste multipliziert.

2. Will ich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E berechnen, so addiere ich die für E günstigen Äste.

Folgende Wahrscheinlichkeiten finde ich im Baumdiagramm:

1. P(W) und P(M):

2. P(B) und P(B):

3. Die „und“ Wahrscheinlichkeiten $P(W \cap B)$:

4. Die „oder“ Wahrscheinlichkeit P(W U B):

5. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

6. Wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten ungleich sind, wie in unserem Unternehmen, bei dem 50% der Frauen, aber nur 20% der Männer befördert wurden, so spricht man davon, dass die beiden Ereignisse *stochastisch abhängig* sind, da es einen Zusammenhang (= Abhängigkeit) zwischen Geschlecht und Karriere gibt. Frauen wurden öfter befördert. Ansonsten sind die Ereignisse *stochastisch unabhängig*. Am Baum kann man also sofort prüfen und verstehen, ob zwei Ereignisse stochastisch abhängig sind oder nicht.

7. Die anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten. Wir wissen zwar wie viele Männer und wie viele Frauen befördert wurden, aber nicht welcher Anteil der Beförderten nun Männer oder Frauen sind. Wir wollen wissen, welcher Anteil Männer unter den Beförderten ist. Dies rechnen wir mit der Laplaceformel. Wir setzen die beförderten Männer ins Verhältnis zu allen Beförderten. Dann gilt:

6 Zwei Ereignisse, die Vierfeldertafel

Eine alternative Übersicht über die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse gibt die 4Felder-Tafel. Bleiben wir bei dem Beispiel mit dem Betrieb. Am oberen und linken Rand trägt man P(W), P(M) sowie P(B) und $P(\overline{B})$, ein. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten stehen gegenüber in der Tafel. In der Mitte stehen die und-Wahrscheinlichkeiten.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten stehen indirekt in der Tabelle. Man bekommt sie, indem man einen Wert in der Mitte durch den Rand teilt. Hat man die bedingten Wahrscheinlichkeiten vorgegeben, so bekommt man entsprechend ein Mittelfeld. Probieren Sie es aus:

	P(B)		
P(W)			

In der Vierfeldertafel gilt: Die Wahrscheinlichkeiten in der Mitte ergeben zusammen die am Rand. So kann die ganze Tabelle ausgefüllt werden. Folgendermaßen findet man alle Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle:

1. P(W), P(M) , P(B) und P(B):

2. Die vier „und“ Wahrscheinlichkeiten:

3. Die „oder“ Wahrscheinlichkeiten: P(W U B):

4. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich indirekt durch die Laplaceformel.

$$P_W(B) = \frac{\text{Alle beförderten Frauen}}{\text{Alle Frauen}}$$

Es gibt drei Möglichkeiten mit diesen schwierigen Wahrscheinlichkeiten umzugehen.

1. (Meine Empfehlung): Sie machen sich gedanklich aus den Wahrscheinlichkeiten eine Anzahl, also aus 0,3 machen sie 30 Frauen. Aus 0,15 machen Sie 15 beförderte Frauen. Sie stecken (bitte nur gedanklich) die 30 Frauen in eine Urne und beschriften 15 mit befördert. Die Wahrscheinlichkeit eine beförderte Frau zu ziehen ergibt sich nun zu

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = P_W(B)$$

2. (Dreisatz). Wenn die Frauen nun die Gesamtheit sind stehen die 0,3, also die 30% für 100 %. Wir wollen wissen, wieviel % die 0,15 sind. Wir rechnen also

$$30\% = 100\%$$

$$1\% = \frac{100\%}{30\%}$$

$$15\% = \frac{100\% \cdot 15\%}{30\%} = 50\%$$

Bei den Ansätzen 1 und 3 gilt die Faustregel für die bedingte Wahrscheinlichkeit : **Mitte durch Rand**

3. (Brachial, mit der Formel, Merkhilfe)

Es gilt die Formel $P_W(B) = \frac{P(\,W \cap B\,)}{P(W)} = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$

Die anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich genau so. Will ich den Anteil der Männer unter den Beförderten wissen, so teile ich die Wahrscheinlichkeit für alle beförderten Männer durch die aller Beförderten. Berechnen Sie mit der Methode Ihrer Wahl:

6. Die stochastische Unabhängigkeit kann wieder über die bedingten Wahrscheinlichkeiten untersucht werden, oder aber mit folgendem Verfahren. Ich multipliziere die Randwahrscheinlichkeiten P(W) und P(B) miteinander. Wenn das Produkt gleich der Wahrscheinlichkeit P(W ∩ B) ist sind die Ereignisse stochastisch unabhängig, wenn ungleich, so stochastisch abhängig. In unserer Firma ergibt sich:

Statt der Wahrscheinlichkeiten läßt sich bei Baum oder Vierfeldertafel auch mit den relativen Häufigkeiten rH arbeiten, bei der Vierfeldertafel sogar mit den absoluten Häufigkeiten. Wir probieren beide Varianten bei einer Vierfeldertafel:
In einer Diskothek sind bei der Sperrstunde noch 50 Gäste. 40 davon sind mit dem Auto da, 15 sind betrunken. 30 fahren nüchtern nach Hause. Zuerst verschaffen wir uns eine Übersicht:

A: $\overline{A}$:
B: $\overline{B}$:

Wir tragen nun entweder die relativen Häufigkeiten als Maß für Wahrscheinlichkeiten oder die absoluten Häufigkeiten ein:

B			

P(B)			

Bei den Fragen zur Vierfeldertafel muss erst einmal herausgelesen werden ob sich die Frage auf alle Personen bezieht, (absolute Wahrscheinlichkeit) oder nur auf einen Teil aller Personen (bedingte Wahrscheinlichkeit). Dazu ein paar Beispielfragen

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand betrunken ist und nach Hause fährt?

Bezieht sich auf ________________. Wahrscheinlichkeit: __________ Zeichen:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand der nach Hause fährt betrunken ist?

Bezieht sich auf ________________. Wahrscheinlichkeit: __________ Zeichen:

Ein Fußgänger wird von der Polizei aufgegriffen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er betrunken?

Bezieht sich auf ________________. Wahrscheinlichkeit: __________ Zeichen:

Fachbegriffe Kapitel 5 und 6, Baumdiagramm und Vierfeldertafel - zweite Woche

Baumdiagramm - Ein Diagramm, welches mir hilft zu erkennen, wie zwei Ereignisse zusammenhängen

Bedingte Wahrscheinlichkeit P_A (B) - Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn bekannt ist, dass A bereits vorliegt. Oder: Der Anteil der Bs unter den As.

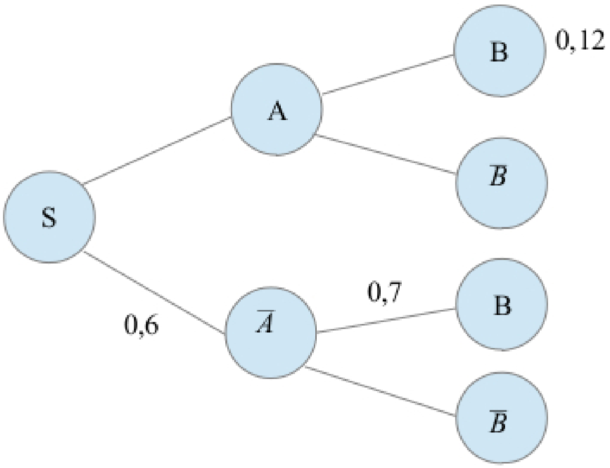
Pfadregeln - Rechenregeln für das Baumdiagramm

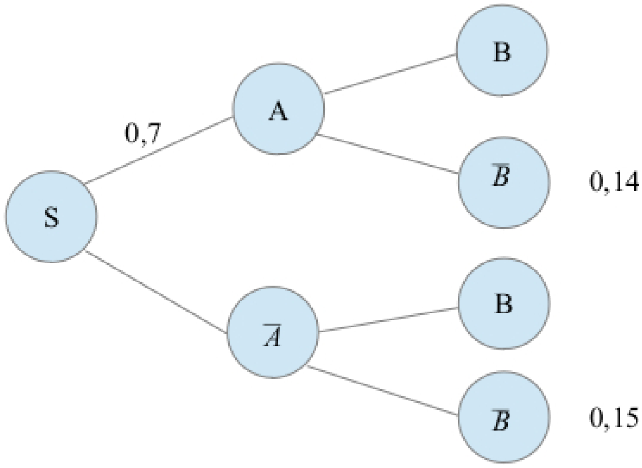
Stochachstische Unabhängigkeit - zwei Ereignisse A, B sind stochastisch unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B nicht durch A beeinflusst wird, d.h. wenn P(B) genau so groß ist wie P_A(B). Bei stochastischer Unabhängikeit kann "und" mit "mal" ausgerechnet werden.

Vierfeldertafel - Alternative zum Baumdiagramm, enthält weniger Angaben, ist dafür aber kompakter und kann mit absoluten Zahlen verwendet werden.

Arbeitsblatt Stochastik 2 - Baumdiagramm und Vierfeldertafel

1. Ergänzen Sie das Baumdiagramm und berechnen Sie alle gefragten Wahrscheinlichkeiten.





P(A) =
P(B) =
P($A \cap B$) =
P($\overline{A} \cap \overline{B}$) =
P($A \cup B$) =
$P_A(B) =$
$P_{\overline{A}}(\overline{B}) =$
$P_B(A) =$
$P_B(\overline{A}) =$
$P_B(A) =$
$P_B(\overline{A}) =$

P(A) =
P(B) =
P($A \cap B$) =
P($\overline{A} \cap \overline{B}$) =
P($A \cup B$) =
$P_A(B) =$
$P_{\overline{A}}(B) =$
$P_B(A) =$
$P_B(\overline{A}) =$
$P_{\overline{B}}(A) =$
$P_{\overline{B}}(\overline{A}) =$

2. Berechnen Sie die fehlenden Größen mit der Vierfeldertafel

	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$
a)	0,6		0,4		0,24			
b)	0,4			0,7		0,3		
c)		0,8		0,8	0,01			
d)	0,6				0,5			0,1
e)					0,25	0,45	0,11	

3. Berechnen Sie die fehlenden Größen (mit Baum oder Vierfeldertafel)

	P(A)	P(B)	$P(A \cap B)$ "und"	$P(A \cup B)$ „oder“	$P_B(A)$	$P_A(B)$	A und B unabhängig?
a)	0,6	0,7	0,42				
b)	0,5	0,9		0,95			
c)	0,3	0,2	0				
d)	0,7			0,8	0,5		
e)		0,5	0,2				Ja
f)*		2xP(A)	0,2	0,9			

4. Für eine Aufnahmeprüfung an einer Hochschule melden sich erfahrungsgemäß Erstanmelder als auch Wiederholer an. 25% der Kandidaten sind Wiederholer. 15% der Wiederholer und 28% der anderen Kandidaten bestehen die Prüfung nicht. Ein Kandidat wird zufällig ausgewählt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er Wiederholer und zugleich einer, der nicht besteht?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Kandidat Wiederholer, wenn er bestanden hat?

5. Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25% auf klassische Musik und 30% auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet. 60% der Käufer einer Klassik-CD und 25% der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre. Insgesamt werden 48% der verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind.

a) Ein Kunde kauft eine Volksmusik-CD. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er höchstens 30 Jahre alt?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft ein Kunde, der älter als 30 Jahre ist, eine Klassik- oder Popmusik-CD?

6. 60% der Kunden eines Kaufhauses parken in der Tiefgarage. Von denen in der Tiefgarage parkenden Kunden tätigen 90% einen Einkauf. 5% aller Kunden benutzen weder die Tiefgarage noch kaufen sie etwas ein.
a) Wie viel Prozent der Kunden tätigen einen Einkauf?
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der nicht in der Tiefgarage parkt, etwas einkauft.
c) An der Kasse steht ein Kunde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die Tiefgarage benutzt?

7. Die Firma Brettlmaier ist ein Holz verarbeitender Betrieb, der Profilbretter herstellt. Die Stämme, die zu Profilbrettern geschnitten werden, bezieht die Firma Brettlmaier von einem Händler, der das Holz waggonweise anliefert. 80 % der Waggons enthalten ausschließlich Stämme aus Europa; der Rest der Waggons hat ausschließlich Ware aus nichteuropäischen Ländern geladen. Nach dem Schnitt werden die Profilbretter nach den Qualitätsstufen A und B sortiert. Man erhält aus den europäischen Stämmen 65 % A-Bretter. Insgesamt liegt der Anteil der A-Sortierung bei 58 %.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Brett der B-Sortierung aus nichteuropäischem Holz hergestellt worden ist?

8. Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40 % der Bewerber Frauen, von denen 90 % die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich.
a) Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden?

9. Am IPA (Institut für Paranormale Aktivitäten unter Jugendlichen) befinden sich 200 Schüler. 140 sind blond, 80 besitzen ein eigenes Auto. 60 Schüler sowohl blond sind als auch Autobesitzer.
a) Wie viel Prozent der blonden Schüler besitzen ein Auto?
b) Sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Schüler blond ist oder ein Auto besitzt?

10. 2 der 200 Schüler des IPA sind hochbegabte Frauen. Wenn es 104 Frauen und 3 Hochbegabte am Institut gibt, wie viel Prozent der Schüler sind dann normale Jungs? Wieviel Prozent der Frauen und wieviel Prozent der Jungen sind hochbegabt?

11. Unter den 24 Mitarbeiter einer Abteilung sind 10 Frauen. 10 Mitarbeiter haben dieses Jahr einen Bonus ausbezahlt bekommen, dabei wurde die Hälfte der Frauen bedacht. Wieviel Prozent der Männer bekamen einen Bonus? Sind die Ereignisse, “Bonus” und “Geschlecht” stochastisch abhängig?

12. In einer 19-köpfigen, - 8 Mädchen, 11 Jungen - Grundschulklasse wurden 12 Schüler aufs Gymnasium zugelassen, 4 bekammen die Realschulzulassung, die restlichen müssen eine Hauptschule besuchen, darunter zwei Mädchen. Kein Mädchen geht auf die Realschule. Sind “Gechlecht” und “Weiterführende Schule” stochastisch abhängig? Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mädchen dieser Klasse auf das Gymnasium, (die Realschule, die Hauptschule) geht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Gymnasiast ein Junge?

7 Vorsicht Grundwissen die Formeln$\binom{n}{k}$ und n!

Stellen Sie sich eine Menge von 4 verschiedenen Dingen, zum Beispiel Schmuckstücke vor.

Sie wollen nun zwei davon heute Abend zum Ausgehen tragen. Wie viele Möglichkeiten haben Sie dazu?
Wir zählen auf: ____&____, ____&____, ____&____, ____&____, ____&____, ____&___.

Weil diese Möglichkeiten so wichtig sind, gibt es in der Kombinatorik dafür ein eigenes Zeichen:

$\binom{4}{2}$ gelesen: "

Dieses Zeichen ist im Tafelwerk und auf dem Taschenrechner mit der Taste $\boxed{\text{nCr}}$ zu finden und berechnet sich folgendermaßen:

$\binom{4}{2}$ =

Probieren Sie ein paar:

$\binom{4}{3} =$ $\binom{8}{1} =$ $\binom{5}{5} =$

$\binom{6}{3} =$ $\binom{5}{2} =$ $\binom{5}{3} =$

Es gibt einen Grund dafür, warum die letzten beiden Möglichkeiten gleich groß sind. Wenn Sie aus 5 Losen zwei auswählen, so lassen Sie gleichzeitig drei in der Hand des Gegenübers. Allgemein kann man die untere Zahl bei der „aus Formel“ durch die zu oben fehlende ersetzen. Probieren Sie damit noch ein paar ohne Taschenrechner:

$\binom{12}{11} =$ $\binom{100}{98} =$ $\binom{n}{0} =$

$\binom{n}{1} =$ $\binom{n}{n} =$ $\binom{n}{2} =$

Ein paar Beispiele: Auf wie viele Arten kann ich aus 21 Schülern 4 auswählen? ____ = ____. Wie können 2 Köpfe unter 6 Plätzen verteilt sein? Wie drei Köpfe? ____, _____. Wie viele Begegnungen gibt es bei der Fußball Bundesliga? _____ = .

Permutationen

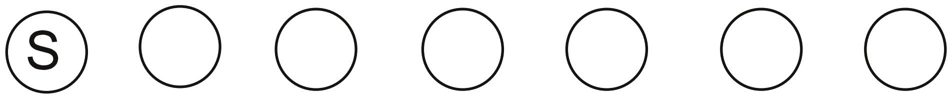
Denken sie sich nun 4 verschiedene Dinge in einer Reihe liegend, zum Beispiel Autos. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung, wie viele Vertauschungen, gibt es ?

Das Zeichen 4! wird gelesen als „ „ und findet sich im Tafelwerk. Lernen Sie die ersten 5 bitte auswendig, sie kommen im Abitur bevorzugt dran.

1! = 2! = 3!= 4!= 5!=

8 Mehrfache Zufallsexperimente

Stellen Sie sich vor Sie werfen eine gezinkte Münze öfters (Sie fragen sich vielleicht,warum Sie so etwas tun sollten), bei der die Wahrscheinlichkeit, dass Kopf kommt 60% ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten mal Kopf kommt ist wieder 60% (warum?). Die Wahrscheinlichkeit, dass beide male Kopf kommt ist 0,6·0,6 = . Werfen Sie nun 6 mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt dann immer Kopf? Das Baumdiagramm sieht hier sehr einfach aus:



somit ergibt sich P(„immer Kopf“) =

Bleiben wir beim 6-fachen Wurf. Folgende Ereignisse lassen sich nun mit Überlegung berechnen, ohne dass das Baumdiagramm extra gezeichnet werden muss:

A: 6 mal Zahl	P(A) =
B: Abwechselnd Kopf und Zahl	P(B) =
C: Der letzte Wurf Kopf	P(C) =
D: Kein mal Kopf	P(D) =
E: Mind. einmal Kopf	P(E) =
F: Genau 4 mal Kopf, hintereinander	P(F) =
G: Genau einmal Kopf	P(G) =
H: Beim zweiten und vierten mal Kopf	P(H) =
I: Genau zweimal Kopf	P(I) =

Für die letzte Frage, müssen wir wissen, auf wie viele Arten die beiden Köpfe liegen können. Dazu malen wir uns die Möglichkeiten auf. Es ergeben sich Möglichkeiten. Oder wir haben das letzte Kapitel verstanden und rechnen ______ = .

Betrachten wir eine Urne, in der 6 rote und 6 weiße Kugeln sind, aus der wir sechs mal *ohne Zurücklegen* ziehen. Berechnen Sie mit den gleichen Gedankengängen wie oben:

A: 6 mal rot	P(A) =
B: Abwechselnd rot und weiß	P(B) =
C: Der zweite Zug ist rot	P(C) =
D: Kein mal rot	P(D) =
E: Mind. einmal rot	P(E) =
F: Genau 5 mal rot, hintereinander	P(F) =
G*: Genau zweimal rot	P(G) =

9 Die Bernoullikette und die n-p-k Formel

Führt man ein Zufallsexperiment wie den Münzwurf oder das Würfeln, bei dem p immer gleich ist, mehrfach durch, so sprechen wir von einer *Bernoullikette*. Wenn es bei einem solchen Experiment nur auf die ____________ der Köpfe oder 6er ankommt, und nicht auf die Reihenfolge, so berechnet man die Wahrscheinlichkeit mittels der *n-p-k Formel* oder entnimmt sie dem Tafelwerk.

Berühmte Bernoullikette, Bedeutung von Treffern und Nieten

-
-
-

-
-
-

Wenn ich zum Beispiel sieben Lose in der Hand habe, und ich weiß, dass jedes vierte Los gewinnt, ich also bei jedem Los wieder die Wahrscheinlichkeit p = 0,25 habe zu gewinnen, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit 3 Treffer zu haben?

Weil diese Frage so wichtig ist gibt es zu ihr eine eigene Formel, die n,p,k Formel:

B(7; 0,25; 3) [allgemein B(n;p;k)]

Interpretiert über die Lose wird sie gelesen:

Die Formel wird so berechnet:

B(7; 0,25; 3) =

Dazu vier Beispiele.

1. Möchte ich die Wahrscheinlichkeit berechnen beim Kauf von 6 Losen 1 Treffer zu haben (schätzen Sie zuerst einmal):

Schätzung: Rechnung: B(; ;) =

2. Die Wahrscheinlichkeit beim fünfmaligen Werfen drei 6er zu erzielen:

B(; ;) =

3. Die Wahrscheinlichkeit beim viermaligen Münzwurf zwei mal Kopf zu erzielen:

B(; ;) =

4. Die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne mit 3 roten und 7 schwarzen Kugeln beim 10maligen Ziehen mit Zurücklegen genau 5 rote zu ziehen.

B(; ;) =

*Formale Definition und Herleitung der n-p-k Formel
Der Mathematiker ist ein Definitions und Ordnungsfreak, in der Mathematik lassen sich die Dinge (im Gegensatz zu der Welt, lesen Sie mal bei Plato nach wie schwer allein die Definition des Angelns ist) recht genau fassen, Ungenauigkeit gibts da weniger. Schwere Formeln werden gerne aus einfachen hergeleitet. Und so sieht das bei den Bernoulliketten aus:
Definitionen: Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ausgängen, Treffer T und Niete N genannt, heißt Bernoulliexperiment. Statt P(„Treffer“) schreibt man kurz p, die Trefferwahrscheinlichkeit, statt P(„Niete“) schreibt man q, die Nietenwahrscheinlichkeit. p und q ergeben zusammen immer 1 oder 100%. Führt man ein Bernoulliexperiment n-mal hintereinander durch, so spricht man von einer Bernoullikette der Länge n. Die Anzahl der Treffer, die man bei einer Bernoullikette erzielt wird mit k bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Treffer heißt Binomialverteilung.
Herleitung der Formel: Die Wahrscheinlichkeit **zuerst** die drei Treffer zu haben **und dann** die vier Nieten berechnet sich zu

$$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^4$$

Hier habe ich auf eine bestimmte Reihenfolge gesetzt. Da es mich aber nur interessiert, dass ich 3 Treffer habe, nicht wann die Treffer auftauchen habe ich viel mehr Chancen. Und zwar so viele mehr wie es Möglichkeiten gibt die drei Treffer auf die sieben Plätze zu verteilen. Das sind genau $\binom{7}{3}$. Mit dieser Zahl wird die obige Formel daher multipliziert.

Ausgehend vom Würfeln und Münzwurf wurden in der Geschichte auch andere Zufallsexperimente entdeckt, die Bernoulliketten bilden. Dabei müssen jedoch zwei Bedingungen gegeben sein, die in der Wirklichkeit nicht immer wahr sind.

1. Gegenbeispiel:

2. Gegenbeispiel:

Diese beiden Bedingungen heißen *Modellannahmen* für Bernoulliketten.

10. Die Bierkastenformel

Auf einer Party steht in einem dunklen Raum ein Bierkasten mit 4 vollen und 16 leeren Flaschen. Jemand (schon angetrunken) nimmt sich zufällig vier Flaschen, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau eine volle Flasche? Hier handelt es sich um das Urnenmodell ______________________. Jetzt kommt es aber nicht auf die Reihenfolge sondern nur auf die __________ der Treffer an. Hierzu gibt es eine Formel, die man sich so merkt: Du machst dir eine Übersicht des Bierkastens, darunter eine der Flaschen, die du herausgezogen hast.

Bierkasten	v(olle)	l(eere)	g(esamt)
Hand	v(olle)	l(eere)	g(esamt)

Jetzt gilt: P(„Ich ziehe eine volle und drei leere“) =

*Herleitung der Bierkasten Formel: Es handelt sich nur um die Laplaceformel. Wir denken uns alle 20 Flaschen des Kastens unterschieden. Es gibt dann insgesamt (   ) Möglichkeiten die Flaschen zu ziehen. Es gibt (   ) Möglichkeiten die eine volle zu erwischen, und (   ) Möglichkeite die drei leeren zu ziehen, dass sind meine günstigen Möglichkeiten.

Bei der Lösung von Aufgaben, bei denen mehrfach mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird, stehen Ihnen ab jetzt grundsätzlich **zwei** Methoden zur Verfügung. Sie rechnen mit der n-p-k (Kapitel 9) bzw. mit der Bierkastenformel (Kapitel 10) oder direkt (Kapitel 8), indem Sie überlegen, wie jeder Zug aussehen könnte. Natürlich haben beide Methoden Vor- und Nachteile (sonst würde ich Ihnen nur eine vorstellen). Die Formeln können etwas umständlich sein und sie können die Reihenfolge nicht berücksichtigen. Bei zu vielen Zügen wird die direkte Methode zu lang.

OMG! n-p-k, Bierkasten, direkt, ich verliere die Übersicht, wie geh ich vor? Ich könnte sagen, was geht mich das an, aber ich habe zumindest Erfahrung mit hunderten von Schülerinnen, die einer ähnlichen Situation waren, die ich mit Ihnen teilen kann. Diejenige, die sich darauf konzentriert, die Formeln auswendig zu lernen, ohne zu verstehen, was eigentlich gelernt wird, fällt meist übelst auf die Fresse; diejenige, die versucht alles direkt zu machen, und rumzuknobeln (was wenn ich jetzt aber nur noch 19 Flaschen im Kasten sind, oder wenn es noch halbvolle gibt) sich aber weigert irgendwelche Formeln auswendig zu lernen, kommt einigermaßen klar im Abitur und lernt die Formeln dann eh noch. Also Mut zum Nerdtum! (Wenn Sie gar nix von beidem machen lesen Sie das hier gerade eh nicht, wenn Sie beides machen und sogar **vernetzen** kommen Sie eh klar und erleichtern mir eine Menge Arbeit (:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit wenn ich aus obigem Kasten 2 Flaschen ziehe, dass beide leer sind.

Bierkastenmethode Direkt

In einer Urne liegen 7 schwarze und 3 weiße Kugeln. Ich entnehme drei Kugeln. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist genau eine davon weiß? b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist höchstens eine weiß? c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte weiß? d) In der Urne liegen nun 70 schwarze und 30 weiße, ich entnehme 30 Kugeln, mit welcher Wahrscheilichkeit sind 10 davon weiß? Rechnen wir zuerst ohne Zurücklegen:

Bierkastenmethode Direkt

Wie sieht das ganze jetzt mit Zurücklegen aus?

n-p-k-Formel Direkt

Fachbegriffe Kapitel 7 bis 11, Bernoulliketten, n-p-k und Bierkastenformel - dritte Woche

Bernoulliexperiment - Ein Zufallsexpriment mit zwei verschiedenen Ausgängen, Treffer (Wahrscheinlichkeit p) und Niete (Wahrscheinlichkeit q = 1 - p) genannt.

Bernoullikette der Länge n - n-faches Ausführen eines Bernoulliexperiments.

Binomialverteilung - Verteilung der Trefferwahrscheinlichkeiten bei einer Bernoullikette. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind umso kleiner, je weiter sie vom Erwartungswert entfernt sind.

μ - Erwartungswert der Binomialverteilung, wird mit $n \cdot p$ berechnet, beim Erwartungswert liegen die Treffer mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.

σ - Standardabweichung einer Binomialverteilung, wird mit der Wurzel aus $n \cdot p \cdot q$ (das ist die Varianz) berechnet.

n-p-k - Formel - Formel zur Berechnung von Trefferwahrscheinlichkeiten bei Bernoulliketten, n ist die Länge der Kette, k die Anzahl der Treffer und p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Zug getroffen wird.

Bierkastenformel - Formel zur Berechnung von Trefferwahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten ohne Zurücklegen.

Arbeitsblatt Stochastik 3 - Mehrfache Zufallsexperimente, n-p-k-Formel, Bierkastenformel

Mehrfache Zufallsexperimente

1. In einer Urne liegen 4 orange und 5 blaue Kugeln. Es wird viermal gezogen, zuerst a) mit Zurücklegen und dann b) ohne Zurücklegen. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Vier orange	B: Keine orange	C: Mindestens eine orange
D: Die zweite ist orange	E: Eine orange	F: 3 orange, hintereinander
G: Höchstens eine orange	H: Abwechselnde Farben	I: Zwei orange

2. Im weltweiten Durchschnitt ist das Geschlechterverhältnis beim Menschen erstaunlich konstant. Auf 100 neugeborene Mädchen kommen 105 bis 106 Jungen. Zeigen Sie, dass dies einer auf zwei Nachkommastellen gerundeten Wahrscheinlichkeit von 49% für eine Mädchengeburt entspricht. Eine Familie hat drei Kinder: Verbinden Sie die Wahrscheinlichkeiten mit den ihnen entsprechenden Ereignissen:

a) alle Mädchen	$1 - 0{,}51^3$
b) höchstens zwei Mädchen sind	$3\cdot 0{,}49^2\cdot 0{,}51$
c) genau ein Mädchen ist	$3\cdot 0{,}49\cdot 0{,}51^2$
d) genau zwei Mädchen sind	$1-0{,}49^3$
e) mindestens zwei Mädchen sind	$0{,}49^3$
f) mindestens ein Mädchen ist?	$0{,}49^3 + 3\cdot 0{,}49^2\cdot 0{,}51$

3. Erfahrungsgemäß erscheinen die 20 Lehrer des IUU (Institut für ungewöhnliche Unterrichtsmethoden) mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 zum Unterricht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass:
a) Ein Lehrer an allen 60 Unterrichtstagen bis Weihnachten anwesend ist.
b) Ein Lehrer an einem Tage der 60 Unterrichtstage bis Weihnachten fehlt.
c) Ein Lehrer an den 60 Unterrichtstagen bis Weihnachten höchstens einmal fehlt.
d) Ein Lehrer mindestens einmal bis Weihnachten fehlt.
e) Ein Lehrer am letzten Unterrichtstag fehlt.

4. Ein Vater kauft für seine drei Söhne Überraschungseier. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er beim Kauf von 10 Eiern
a) keine Figur hat b) mindestens eine Figur hat c) erst drei Figuren und dann keine mehr
d) genau eine Figur hat d) Im ersten Ei eine Figur hat f) 10 Figuren hat.

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 25 Schülern mindestens einer am 24. Dezember Geburtstag hat? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 100 Schülern? Wie kann dieses Zufallsexperiment mit der Urne simuliert werden?

6. In einer Urne liegen drei rote, zwei blaue und eine gelbe Kugel. Jemand zieht zufällig hintereinander dreimal ohne zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er **a)** nur rote **b)** erst gelb und dann blau dann rot **c)** drei verschiedene **d)** drei gleiche **e)** zwei gelbe **f)** keine gelbe **g)** eine gelbe **h)** die zweite rot

7. *Bei der Jagd auf ein bewegliches Ziel, feuern ein Soldat (Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,2), zwei Jugendliche (p =0,12), drei Zivilisten (p = 0,1) ein Jäger (p = 0,15) und ein Waffennarr (p = 0,05) je einen Schuß ab. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen? b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Soldat oder der Jäger?

Die n-p-k-Formel

8. Laut Statistischem Bundesamt (so etwas gibt es) ist fast jeder Fünfte in Deutschland von Armut oder sozialer Ausgrenzung betroffen. Es werde zufällig ausgewählt. Ergänzen sie die Tabelle:

Sachverhalt	B(; ;) - Formel	Ausgeschriebene Formel	Ergebnis
Zwei von sieben sind arm	$B(7;\frac{1}{5};2)$	$\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5$	0,28
Drei von zwölf sind arm			
Mindestens einer von vier ist arm			
Keiner unter 6 ist arm			
Zwei von 5 sind nicht arm			
	$B(10;\frac{4}{5};10)$		
		$\binom{50}{12}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{38}$	
		$8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^7+\left(\frac{4}{5}\right)^8$	

9. Laut einer Universitätsstudie aus Passau sind 40% der Absolventen eines Lehramtsstudiums für den Beruf des Lehrers nicht geeignet. Raca bekommt in der achten Klasse zufällig zehn Lehrer zugeteilt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
i) 9 davon geeignet ii) Alle geeignet iii) 5 oder 6 geeignet iv) Mindestens einer geeignet

b) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang (finden Sie einen schönen deutschen Satz)

a) $\binom{10}{5}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^5$ b) $\binom{10}{8}\cdot 0{,}6^8\cdot 0{,}4^2+\binom{10}{9}\cdot 0{,}6^9\cdot 0{,}4+0{,}6^{10}$ c) $1-0{,}6^{10}$

10. Eine Laplacemünze wird 12 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt sieben mal Kopf.

11. (Kniffel) 5 Laplacewürfel werden geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man
a) drei 6er b) fünf 6er c)keine 6 d) Mindestens eine 6 e) höchstens eine 6
f)* Lauter verschiedene g)* fünf gleiche h)**eine Straße i)***Full House

12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 782 produzierten Autos alle intakt sind, wenn ein Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,999 intakt ist.

13. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinne ich nie 6 richtige obwohl ich ein Leben lang jeden Tag Lotto spiele.(Gewinnwahrscheinlichkeit für 6 richtige 1 zu 14 Million, gehen Sie von 70 Jahren aus).

Mit oder ohne Zurücklegen - n-p-k Formel gegen Bierkasten

14. Aus einer Klasse mit 14 Schülerin und 17 Schülern werden 4 für ein Projekt zufällig ausgewählt. Mit welcher Wkt. wurden gleich viel Jungs und Mädchen gewählt?

15. Jens wählt aus dem Telefonbuch zufällig 7 Nummern, mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter vier Frauen?

16. In einem Theater mit 200 Plätzen werden bei einer ausverkauften Vorstellung 160 Karten verkauft, 40 Karten gehen an Abonnenten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen in einer Reihe mit 10 Personen vier Abonnenten?

17. Rechnen Sie die Aufgabe 18 wie im Modell „mit Zurücklegen“. Warum ergibt sich eine ähnliche Wahrscheinlichkeit?

18. 30 % der Besucher eines Fitnessstudios sind unter 20 Jahre alt. Wenn 9 Personen, das Studio verlassen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter 3 unter 20 Jahre alt?

19. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe 20, wenn Sie wissen, dass das Studio insgesamt nur 40 Kunden hat.

20. 1% der Besucher des Oktoberfestes sind nach 22.00 so betrunken, dass Sie sich übergeben müssen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen sich in einer U-Bahn Kabine mit 100 Besuchern mindestens einer übergeben?

21. In eine U-Bahn steigen 12 Jugendliche und 15 Erwachsene. Eine Person sitzt in der Bahn. Mit welcher Wkt. werden die drei leeren Plätze um diese Person von höchstens einem Jugendlichen eingenommen?

22. Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand schwarz fährt beträgt 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 10 Personen genau zwei Schwarzfahrer?

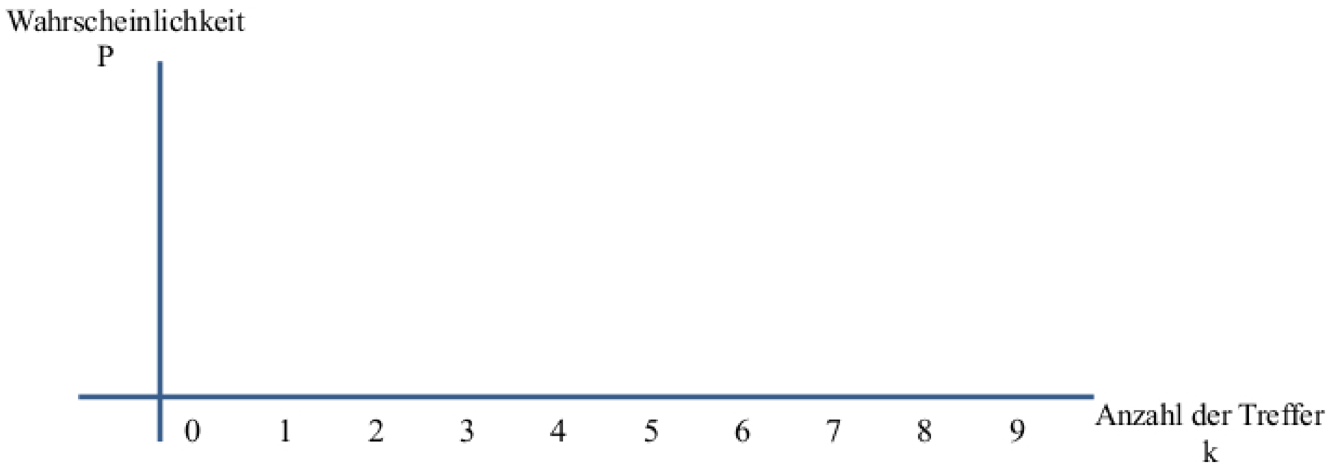
23. Unter den zwanzig Personen einer Trambahn befinden sich zwei Schwarzfahrer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 10 kontrollierten Personen dieser Bahn genau zwei Schwarzfahrer.

11 Die Binomialverteilung

Aus Erfahrung weiß man, (immer ein guter Anfang, wenn man keine Argumente mehr hat), dass jeder dritte Mensch ($p = 1/3$) Angst vor der Dunkelheit hat (= Treffer). In einem S-Bahn Abteil befinden sich 9 zufällig ausgewählte Personen, es liegt eine Bernoullikette der Länge 9 vor. Also können wir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 Treffer (= Personen mit Angst vor der Dunkelheit) haben. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind nicht ________________.
Hier spricht man von einer **Binomialverteilung.** Sie sind im Tafelwerk für die wichtigsten Werte komplett verzeichnet.

k (Anzahl Treffer)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B (9; 1/3; k) (Wkt.)										

Man kann die Wahrscheinlichkeiten auch grafisch in einem Balkendiagramm darstellen.



Für den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung gelten folgende kürzeren Formeln.

$\mu = E(X) =$ $\qquad$ $Var(X) =$ $\qquad$ $\sigma =$

Für Binomialverteilungen gelten zwei Gesetze. 1: Um den Erwartungswert liegen die höchsten Wahrscheinlichkeiten, und 2: die Wahrscheinlichkeiten fallen links und rechts vom Erwartungswert ab. Der Erwartungswert kann auch eine echte Dezimalzahl wie 2,33 sein. Dann liegen die höchsten Wahrscheinlichkeiten bei 2 und 3 Treffern.

12 Praktische Berechnung von Bernoulliketten

In der Regel interessiert man sich weniger für eine genaue Trefferanzahl, als für eine Mindest- oder Höchstanzahl von Treffern. Beim Kauf von 15 Losen (Jedes 5te Lose gewinnt, p = 0,2) interessiert man sich z.B. für die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Treffer zu bekommen. Es können 2 sein, dürfen aber auch 3, 4 oder mehr sein. Dazu müssen alle Einzeltreffer einzeln berechnet werden und dann zusammenaddiert werden. In unserem Beispiel gilt:

P(„Mindestens zwei Treffer beim Kauf von 15 Losen“) = B(15; 0,2; 2) + B(15; 0,2; 3) + B(15; 0,2; 4) + ... + B(15; 0,2; 15) = $\binom{15}{2} \cdot 0{,}2^2\ 0{,}8^{13}$+ .....

Insgesamt müssten wir die n,p,k Formel 14 mal anwenden und jeweils mit dem Taschenrechner ausrechnen, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Dieser Aufwand ist zu groß, daher benötigt man zur Lösung solcher Fälle eine **Strategie**, das ***Tafelwerk*** oder einen **modernen Taschenrechner**. Damit man die Summanden nicht alle hinschreiben muss benutzt man als neues Zeichen das Summenzeichen ∑:

$$\sum_{i=2}^{15} B\left(15;\frac{1}{5};i\right)$$

gelesen “

i wandert zwischen der 2 (zwei Treffer) und der 15 (fünfzehn Treffer) hin und her, dazwischen kommt ein Pluszeichen (dafür steht das ∑). Wenn Sie das Zeichen lesen können, kommen wir zu den Strategien die Aufgaben zu lösen:

A) „Höchstens k Treffer“

Oft interessiert man sich dafür, dass man höchstens eine bestimmte Anzahl von Treffern hat. Nehmen wir an, eine Schraube ist mit Wahrscheinlichkeit p=0,05 defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann von 100 Schrauben höchstens 10 defekt? Wir schreiben: P(„höchstens 10 Schrauben defekt“) = Die Wahrscheinlichkeiten für „höchstens“ finden wir im Tafelwerk. Während in der linken Spalte die Wahrscheinlichkeit für „genau 10 Treffer“ steht, findet sich in der Rechten die Wahrscheinlichkeit für „höchstens 10 Treffer“. Berechnen Sie jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass ich beim 4-Fachen Würfeln höchstens eine 6 habe:

B) „Mindestens k Treffer“

Im Beispiel mit den Losen (p = 0,2 oder $\frac{1}{5}$) haben wir uns dafür interessiert, dass wir mindestens 2 Treffer erzielen. Wir rechnen mit dem Gegenereignis. Das Gegenereignis zu „mindestens zwei Gewinne“ ist „höchstens ein Gewinn“, das steht im Tafelwerk. Wir rechnen folgendermaßen:

P(„Mindestens zwei Treffer beim Kauf von 15 Losen“) =

oder wir beherrschen den modernen Taschenrechner und rechnen direkt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Produktion von 100 Schrauben wie oben (p =0,05) mindestens 4 defekt sind.

P(„Mindestens 4 Schrauben defekt“) =

Besonders häufig wird die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer gesucht. In diesem Fall besteht das Gegenereignis darin, dass man höchstens null, also (genau) keinen Treffer hat. Beim Gegenereignis fällt dann das Summenzeichen weg.

P(„Mindestens 1 Schraube defekt“) =

C)* „Zwischen k und l Treffern“

Manchmal, aber selten wird zum Beispiel nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass man unter 100 zwischen 7 und 11 defekte Schrauben hat. Dann rechnet man folgendermaßen: (Hier muss man zweimal ins Tafelwerk sehen, mit dem modernen Taschenrechner erledigt sich auch das.)

P(„Zwischen 7 und 11 defekte Schrauben“) =

D) “Nicht im Tafelwerk“

Nicht alle Wahrscheinlichkeiten sind im Tafelwerk verzeichnet. Dann muss man die Trefferwahrscheinlichkeiten alle mit der n,p,k Formel ausrechnen und addieren. Bis zu vier Summanden können im Abitur vorkommen (Zeitdruck). Zum Beispiel findet sich die Wahrscheinlichkeit für die Figur im Überraschungsei nicht im Tafelwerk. Um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, beim Kauf von 4 Überraschungseiern mindestens zwei Figuren zu haben rechnet man also:

P(„Mindestens zwei Figuren“) =

Natürlich erledigt der moderne Taschenrechner auch dieses Problem, also satteln sie um!

E) Kein Treffer, nur Treffer, Mindestens ein Treffer, Mindestens eine Niete

Sei die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei einem Bernoulliexperiment p, die Nietenwahrscheinlichkeit q = 1-p. Sie spielen n mal. Dann rechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten immer direkt:

P(Trifft immer) = p^n

P(Mindestens eine Niete) = $1 - p^n$

P(Trifft nie)= $q^n = (1-p)^n$

P(Mindestens ein Treffer") = $1 - q^n = 1 - (1-p)^n$

Ein Beispiel. Bei einem Glücksrad ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn p = 0,26. Judith dreht 4 mal. Ergänzen Sie die passenden Formeln:

P(Trifft immer) =

P(Mindestens eine Niete) =

P(Trifft nie)=

P(Mindestens ein Treffer") =

13 Spezielle Bernoulliketten

Bei normalen Bernoulliketten wird nach der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gefragt. Bei speziellen Bernoulliketten ist die Wahrscheinlichkeit vorgegeben, und es wird nach n, der Anzahl der Züge oder nach p, der Einzelwahrscheinlichkeit gefragt. Es gibt dabei drei Grundtypen von Aufgaben

Ich spiele so lange, bis ich sicher einmal gewinne - oder die "dreimal mindestens" Aufgabe

Eine Ölfirma weiß aus Erfahrung, dass bei einer Probebohrung mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% Öl gefunden wird. Die Firma möchte sicher stellen, dass in den nächsten Monaten neues Öl gefunden wird. Je mehr Probebohrungen sie durchführt, desto höher wird die Wahrscheinlichkeit fündig wird. 100% Sicherheit gibt es nicht (warum?). Aber jede andere Sicherheit (z.B. 80%, 90%, 95%, 99%, 99,9%) kann erreicht werden. Nehmen wir zum Beispiel 95%. Dann stellt sich folgende Frage: Wie viele Probebohrungen muss die Firma **mindestens** durchführen um mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 95% **mindestens** einmal auf Öl zu stoßen?

Gesucht ist die Länge der Kette. Da diese unbekannt ist nennen wir sie n. Wir arbeiten mit dem Gegenereignis, welches bedeutet, dass wir niemals Öl finden. Diese Wahrscheinlichkeit muss unter 5% liegen. Wir erhöhen n schrittweise und notieren die Wahrscheinlichkeiten.

Anzahl der Bohrungen	1	2
Wahrscheinlichkeit für kein Öl	0,9	$0{,}9^2 = 0{,}81$
Wahrscheinlichkeit für mindestens 1 mal Öl	0,1	0,19

Auf diese Weise lässt sich die Anzahl der nötigen Bohrungen mit Hilfe des Tafelwerks oder des Taschenrechners durch ausprobieren herausfinden. Wenn sie das passende n gefunden haben, schreiben Sie ihre Überlegungen folgendermaßen auf:

Wer mehr Muße hat, und gerne schön schreibt, kann die Aufgabe auch so lösen, das gibt zwar nicht mehr Punkte, macht aber auf alle Fälle einen guten Eindruck:

„Wilhelm Tell“
Wilhelm Tell ist bekannt als ausgezeichneter Armbrustschütze. Er trifft einen Apfel auf zwanzig Meter Entfernung mit einer Wahrscheinlichkeit von 92%. Tell soll bei "Wetten Dass" auftreten. Dazu wird ihm der Apfel mehrfach vorgelegt. Tell muss jedes mal treffen. Je mehr Äpfel vorgelegt werden, desto unwahrscheinlicher wird es, dass er alle trifft. Es stellt sich folgende Frage: Wie viele Äpfel darf man Tell höchstens vorlegen, damit die Wahrscheinlichkeit alle zu treffen noch über 50% beträgt?

Knobeln Topseriös

„Kindergeburtstag, p gesucht“
Lena hat zu ihrem Kindergeburtstag 9 Kinder eingeladen. Sie wünscht sich, dass alle anwesend sind. Wie gut muss die Zuverlässigkeit p jedes Kindes sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kinder kommen noch über 90% liegt. (Überlegen Sie, warum p > 0.9 gelten muss).

Fachbegriffe Kapitel 12 und 13 - vierte Woche

Bernoulliexperiment - Ein Zufallsexpriment mit zwei verschiedenen Ausgängen, Treffer (Wahrscheinlichkeit p) und Niete (Wahrscheinlichkeit q = 1 - p) genannt.

Bernoullikette der Länge n - n-faches Ausführen eines Bernoulliexperiment.

Binomialverteilung - Verteilung der Trefferwahrscheinlichkeiten bei einer Bernoullikette. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind umso kleiner, je weiter sie vom Erwartungswert entfernt sind.

μ - Erwartungswert der Binomialverteilung, wird mit n·p berechnet, beim Erwartungswert liegen die Treffer mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.

σ - Standardabweichung einer Binomialverteilung, wird mit der Wurzel aus n·p·q (das ist die Varianz) berechnet.

n-p-k - Formel - Formel zur Berechnung von Trefferwahrscheinlichkeiten bei Bernoulliketten, n ist die Länge der Kette, k die Anzahl der Treffer und p die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass bei einem Zug getroffen wird.

Bierkastenformel - Formel zur Berechnung von Trefferwahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten ohne Zurücklegen.

Arbeitsblatt Stochastik 4 - Die Binomialverteilung und spezielle Bernoulliketten

1. Verwenden Sie das Tafelwerk, wenn nicht möglich berechnen Sie

B(10; 0,5 ; 4) =	B(12; 0,7 ; 10) =	B(9; 0,3 ; 3)=
B(10; 0,95 ; 10) =	B(20; 0,45 ; 4) =	B(30; 0,1 ; 2) =
B(11; 0,23 ; 0) =	B(13; 0,5 ; 7) =	B(8; 1/3 ; 2) =
B(15; 2/7 ; 4) =	B(100; 1/5 ; 18) =	B(100; 1/2 ; 48) =
B(200; 1/10 ; 20) =	B(200; 1/5 ; 42) =	B(1000; 1/4 ; 250) =

2. Ermitteln Sie mit Hilfe des Tafelwerks:

$$a)\sum_{i=0}^{7} B(10,\frac{3}{5},i)\quad b)\sum_{i=0}^{13} B(20,\frac{7}{10},i)\quad c)\sum_{i=0}^{20} B(100,\frac{1}{6},i)\quad d)\sum_{i=0}^{100} B(200,\ 0{,}6\ \ ,i)\quad e)\sum_{i=0}^{17} B(50,\frac{1}{3},i)$$

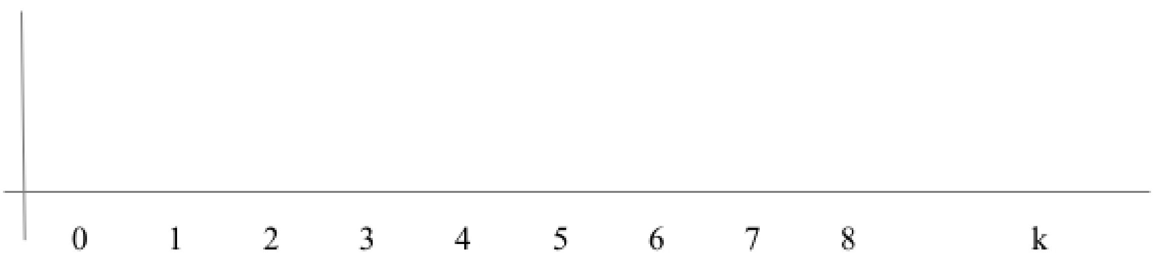
3. Ermitteln Sie mit Hilfe des Tafelwerks:

$$a)\sum_{i=3}^{10} B(10,\frac{3}{5},i)\quad b)\sum_{i=11}^{20} B(20,\frac{7}{10},i)\quad c)\sum_{i=15}^{100} B(100,\frac{1}{6},i)\quad d)\sum_{i=122}^{200} B(200,\ 0{,}6\ \ ,i)\quad e)\sum_{i=20}^{50} B(50,\frac{1}{3},i)$$

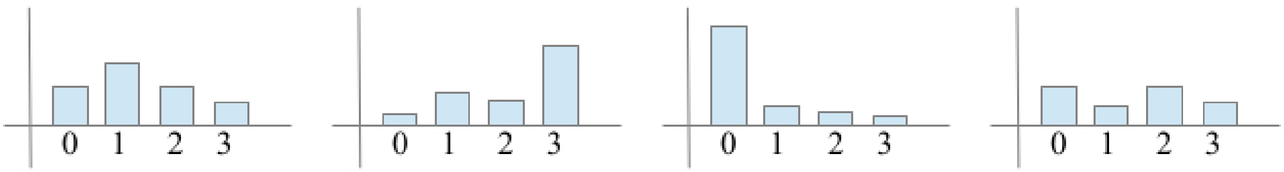
4. Ermitteln Sie mit Hilfe des Tafelwerks oder berechnen Sie:

$$a)\sum_{i=2}^{7} B(10,\frac{3}{5},i)\quad b)\sum_{i=11}^{16} B(20,\frac{7}{10},i)\quad c)\sum_{i=10}^{20} B(100,\frac{1}{6},i)\quad d)\sum_{i=7}^{9} B(12,\ 0{,}8\ \ ,i)\quad e)\sum_{i=16}^{17} B(50,\frac{1}{3},i)$$

5. Kai kauft sich 8 Lose, wobei die Chance zu gewinnen 1/4 beträgt. Vervollständige das folgende Diagramm mit Hilfe des Tafelwerkes und markiere den Erwartungswert glitzerblau.



6. Unten stehend sehen Sie vier Verteilungen eines Spiels, bei dem vier Treffer erzielt werden können. Schätzen Sie für jede Verteilung den Erwartungswert und begründen Sie, warum zwei Verteilungen keine Binomialverteilungen sein können.



7. Finden Sie das kleinste k, welches die folgende Ungleichung erfüllt.

$$a)\sum_{i=0}^{k} B(100,\frac{1}{2},i)\geq 0{,}7\quad b)\sum_{i=0}^{k} B(20,\frac{1}{6},i)\geq 0{,}99\quad c)\sum_{i=0}^{k} B(200,\ 0{,}2\ \ ,i)\geq 0{,}96\quad d)\sum_{i=0}^{k} B(50,\frac{1}{3},i)\geq 0{,}9$$

8. Geben Sie den Erwartungswert μ, die mittlere Anzahl der Treffer, an:

a) Kauf von 12 Losen, jedes vierte gewinnt.
b) Kauf von 100 Überraschungseiern
c) Produktion von 800 Autos, P(„intakt“) = 0,98
d) 240 mal Würfeln, die 6 gilt als Treffer
e) Anwesenheit von 25 Personen, P(„erscheint“) = 0,85
f) 20-maliges Ziehen mit Zurück-legen aus einer Urne mit drei schwarzen Kugeln und sieben weißen, die schwarze Kugel gilt als Treffer.

9. In einer Urne liegen drei rote und zwei blaue Kugeln. Es wird zehn mal gezogen, wobei nach jedem Zug zurückgelegt wird. Berechnen Sie mit Hilfe des Tafelwerks die Wahrscheinlichkeit dass:

a) Genau 5 rote Kugeln
b) mindestens 5 rote Kugeln
c) mindestens der Erwartungswert an roten Kugeln
d) zwischen 5 und 7 roten Kugeln
e) mindestens einmal eine rote Kugel gezogen wird.

10. Laut Eurostat, dem statistischen Amt der EU, arbeiteten 2011 70% der Erwerbstätigen in der EU im Dienstleistungsbereich. Auf die Bereiche Industrie und Bauwesen entfielen 25% und auf Landwirtschaft 5%. 100 Erwerbstätige werden zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

a) Höchstens 66 im Dienstleistungsbereich
b) Mindestens 80 im Dienstleistungsbereich
c) Zwischen 65 und 75 im Dienstleistungsbereich
d) Höchstens 18 im Baugewerbe
e) Mehr als 22 im Baugewerbe
f) Höchstens 3 vom Erwartungswert entfernt im Baugewerbe
g) Höchstens 8 in der Landwirtschaft
h) Mindestens 1 in der Landwirtschaft
i) Zwei oder drei in der Landwirtschaft
j) Höchstens der doppelte Erwartungswert in der Landwirtschaft tätig.

11. Die Ausschusswahrscheinlichkeit bei der Produktion eines Handys sei 5%. Zwei Arbeiter streiten sich darüber, ob es wahrscheinlicher sei, kein defektes Handy unter 10 zu finden oder mindestens ein defektes unter 20. Nehmen Sie begründet Stellung.

Spezielle Aufgaben zu Bernoulliketten

12. Wie oft muss man mindestens würfeln, um mit mindestens 99% mindestens eine 6 zu erhalten?

13. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem untersuchten Kleeblatt um ein vierblättriges handelt, beträgt 0,1%.
a)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 200 Kleeblättern mindestens ein vierblättriges zu finden?
b)Wie viele Kleeblätter muss man mindestens untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens ein vierblättriges zu finden?

14. Der Gammelfleischkontrolleur Gutfried Gnadenlos liefert jede Woche 100 Proben, die er für schlecht hält, an ein Labor. Erwartungsgemäß liegt er in über 80% der Fälle in allen 100 Proben absolut richtig mit seinen Prognosen. Wie sicher kontrolliert Gnadenlos? (p gesucht)

15. Wie viele Überraschungseier muss ein Vater wenigstens erwerben, wenn er seiner Tochter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine
Figur verschaffen möchte.

16. Gerd beantwortet Wissensfragen zum Thema Sport mit 95% richtig. Wie viele Fragen darf man ihm höchstens stellen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er alle richtig beantwortet, noch über 50% liegt?

17. *Bei einer Tombola gewinnt jedes dritte Los. Wie viele Lose muss man mindestens ziehen, damit man mit mehr als 80% mindestens zwei Gewinne erzielt. (Benutzen Sie das Tafelwerk!)

18. Ein Betriebssystem funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% korrekt, wenn man den Rechner hochfährt. Wie oft darf man den Rechner höchstens hochfahren, damit es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% zu keiner Fehlfunktion kommt?

14 Der Alternativtest

In einer Firma werden produziert. Dabei werden die Produkte in einer alten Halle B und in einer neuen Halle A produziert. Die Produkte aus Halle B sind zu 20% defekt, die aus Halle A nur zu 5%. Die Ware wird dementsprechend als A-Ware (teurer) oder B-Ware verkauft und zu 10.000 Stück in Kisten gepackt und gekennzeichnet.

Eine Kiste taucht zwischen den beiden Hallen auf, bei der das Etikett abgerissen ist. Was soll mit dieser Kiste geschehen? Zwei grundlegende Fehler können hier auftreten:

1.

2.

Mehrere Optionen sind denkbar, um mit dieser Misere umzugehen.

- -
- -

Bei der letzten Option, der Durchführung eines Tests, ist nicht garantiert, dass die Firma keinen Fehler macht, da der Zufall ins Spiel kommt. Es ist möglich, dass aus einer B-Kiste nur wenig defekte Produkte gezogen werden, und man sie irrtümlich für eine A-Kiste hält. Aber das Risiko die Kiste falsch auszuzeichnen, kann von 50% (warum?) deutlich gesenkt werden. Mathematisch rechnet man wie beim Ziehen mit Zurücklegen, wegen der großen Anzahl (10.000), es liegt also eine Bernoullikette vor. Der Stichprobenumfang, also z.B $n = 100$, ist die Länge der Kette. Jetzt muss man den Arbeitern eine Regel vorgeben, welche ihnen anweist, wie sie aufgrund der Stichprobe zu entscheiden haben. Dabei orientiert man sich am Erwartungswert. In einer B-Kiste sind $\mu = 0{,}2 \cdot 100 = 20$ defekte Produkte zu erwarten, in einer A-Kiste $\mu = 0{,}05 \cdot 100 = 5$. Wenn man um die 20 defekte Stücke zieht geht man von einer B Kiste, wenn um die 5 von einer A Kiste aus. Irgendwo dazwischen wird die Entscheidungsregel gesetzt. Der zuständige Mitarbeiter setzt folgende Regel. Bei bis zu 12 defekten Stücken entscheidet man sich das Etikett A draufzukleben, ab 13 defekten kommt B drauf. Diese Regel malt man sich so auf:

0 12 | 13 100 Anzahl der defekten Stücke

Entscheidung für Kiste A Entscheidung für Kiste B

Jetzt lassen sich die beiden Fehler, die immer noch auftreten können, berechnen:

1. Ich habe eine A-Kiste vor mir, mache eine Stichprobe, finde aber zufällig mehr als 12 defekte Produkte und klebe das Etikett B auf die Kiste:

2. Ich habe eine B-Kiste vor mir, mache eine Stichprobe, finde aber zufällig nur zwischen 0 und 12 defekte Produkte und klebe das Etikett A auf die Kiste:

Man erkennt: die Fehlerwahrscheinlichkeiten wurden extrem _______________.

15 Der Signifikanztest

Statistik spielt in der Wissenschaft eine wichtige Rolle um Erkenntnisse zu gewinnen. Da aber der Zufall eine Rolle spielt, können statistische Daten nicht einfach als „Beweis" zugelassen werden. Nehmen wir ein Beispiel. Wir möchten wissen, ob die Einwohner von München den Bau von Trambahnschienen durch den Englischen Garten wünschen. Da es zu umständlich und zu teuer ist alle Münchner zu befragen, nehmen wir eine Stichprobe n =100. Wir fragen 100 Münchner nach ihrer Einstellung zum Bau der Schienen und bekommen als Ergebnis, dass 32 für den Bau sind, 68 aber dagegen. Was bringt uns dieses Ergebnis? Wir können nicht behaupten, dass nur 32% der Münchner für den Schienenbau sind, (warum?) aber irgendwie sagt uns die Umfrage schon etwas. Der Signifikanztest lässt uns dieses „etwas" besser verstehen.

Beim Signifikanztest müssen wir von einer alten aus der Erfahrung bekannten, Hypothese ausgehen, Nullhypothese genannt. Diese knöpfen wir uns vor, mit dem Ziel sie statistisch zu widerlegen. In unserem Beispiel nehmen wir an, dass die Stadtwerke davon ausgehen, dass die Mehrheit der Münchener begrüßt, dass der Bus wegen seiner Abgase zugunsten der Trambahn abgeschafft werden soll. Die Nullhypothese lautet somit:

H : Mindestens 50% der Münchner sind für die Tram durch den Englischen Garten

Von dieser Hypothese wollen die Stadtwerke den Bau der Tram abhängig machen. Nun beginnt der eigentliche Signifikanztest. Dazu wird der Stichprobenumfang hier n = 100 und eine Irrtumswahrscheinlichkeit, Signifikanzniveau genannt, festgelegt. Da die Statistik nie absolute Sicherheit geben kann, legt man ein Risiko fest, meist 5%. Man zieht eine Leiste, wie beim Alternativtest, aber da man die Entscheidungsregel noch nicht kennt nimmt man die Buchstaben k, k+1.

0 k | k+1 100 Anzahl der Befürworter

H wird abgelehnt

Wenn sich wenig Menschen (0 bis k) für die Tram aussprechen, so gilt die Nullhypothese als _______________, da sie von „mindestens" spricht. Sollten sich viele Menschen (k+1 bis 100) für die Tram aussprechen, so konnte die Nullhypothese ________________________________ und muss toleriert werden. Der Witz beim Signifikanztest ist es, dass man die Nullhypothese nur dann widerlegt, wenn man sich sehr sicher ist. Die Nullhypothese soll nicht leichtfertig irrtümlich widerlegt werden. Mathematisch ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass wir H ablehnen, obwohl H wahr ist, soll kleiner als das Signifikanzniveau sein.

P("Ich lehne H ab, obwohl H wahr ist") soll höchstens 5 % betragen

übersetzt in eine Formel

$$\sum_{i=0}^{k} B(100\,;0{,}5,i) \le 0{,}05$$

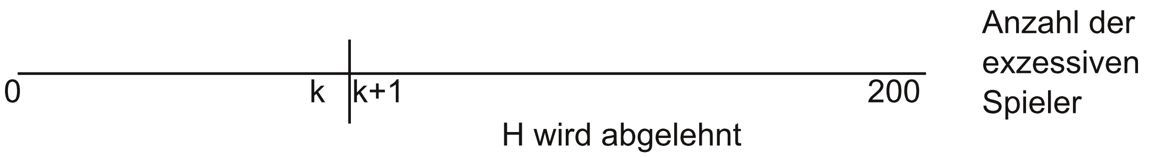
i = 0 bis k steht dafür, dass wir ablehnen, die 0,5 stehen dafür dass die Nullhypothese stimmt, die 0,05 stehen für unser Risiko uns zu irren. Wir finden k nun im Tafelwerk. Wir gehen die rechte Spalte (wegen 0 bis k) solange hinauf bis wir den letzten Wert k finden der kleiner als 0,05 ist. Wir finden k = _________
Jetzt können wir unsere Entscheidungsregel schließlich aufschreiben:

Damit können wir die Umfrage auswerten. Die 32 Ja-Stimmen liegen im Ablehnungsbereich der Nullhypothese, sie ist also widerlegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir uns irren liegt dabei unter 5% (Signifikanzniveau). Man spricht davon, dass die Nullhypothese *signifikant oder wissenschaftlich widerlegt* wurde.

Nehmen wir ein weiteres Beispiel. Psychologen vermuten, dass die exzessive Computerspielesucht unter jungen männlichen Erwachsenen (16-23) in Bayern zugenommen hat. Als exzessiv gilt eine Spieldauer von mehr als 4,5 Stunden pro Tag. Um die Vermutung zu testen, dass es deutlich mehr als 10% der Männer sind testet man die Nullhypothese

H: Höchstens 10% der jungen erwachsenen Männer spielt exzessiv.

Es muss einem gelingen die Nullhypothese zu widerlegen, damit man davon ausgehen darf, dass deutlich mehr als 10% exzessiv spielen. Wir befragen n = 200 Personen und nehmen das übliche Risiko (Signifikanzniveau) von 0,05. Es ergibt sich folgende Leiste:



Die Nullhypothese wird dieses mal ab k+1 abgelehnt, da sie von höchstens spricht. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir H ablehnen, obwohl sie wahr ist, soll wieder kleiner als das Signifikanzniveau sein. Dieses können wir nun als Formel schreiben:

P("Ich lehne H ab, obwohl H wahr ist") =

Diese Formel können wir nicht direkt aus der Formelsammlung ablesen, deshalb sind die „höchstens“ Nullhypothesen etwas schwerer. Wir arbeiten mit der Gegenwahrscheinlichkeit. Wenn die Wahrscheinlichkeit zwischen k+1 und 100 Treffer unter 5% liegen soll, so muss die Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und k Treffern zu haben über 95% liegen. Wir drehen also die ganze Formel um:

Diese Formel können wir aus dem Tafelwerk herauslesen. Wir suchen das kleinste k, so dass die Wahrscheinlichkeit über 0,95 drüber springt, also k = ______
Damit ergibt sich die Entscheidungsregel:

*Der ß -Fehler
Wenn man die Entscheidungsregel in einem Signifikanztest gefunden hat, so lehnt man die Nullhypothese nur zu 5% ab, obwohl sie wahr ist. Dieser Fehler heit auch Fehler erster Art oder α-Fehler. Nun lässt sich auch ein zweiter Fehler machen. Nehmen wir an, wir wüssten, dass in Wirklichkeit genau 20% der jungen Erwachsenen exzessiv Computerspielen (wir würden also über einen Gottesblick verfügen, und da wir über den nicht verfügen kommt dieser Fehler selten dran). Dann kann es nach unserem Test trotzdem dazu kommen, dass wir die Nullhypothese nicht widerlegen konnten, also tolerieren oder annehmen, obwohl sie falsch ist, denn eine andere Hypothese, die Alternativhypothese, ist richtig. Im ß -Fehler rechnen wir mit der Entscheidungsregel des Signifikanztests, also liegt eine normale Bernoullikette vor:

*Validität und Repräsentativität
Damit solche Studien/Tests/Erehebungen/Umfragen nicht der letzte Schrott sind müssen sie zwei wichtigen Kriterien genügen. Sie müssen 1. *valide*, d.h. wahrheitsgemäß sein und 2. *repräsentativ*, d.h. die befragte Gruppe muss die Menschen wiederspiegeln, für die man sich interessiert.

Beispiele dafür, dass eine Umfrage nicht valide ist sind:

Beispiele dafür, dass eine Umfrage nicht repräsentativ ist:

**Eine Umfrage ist dann repräsentativ, wenn das Kriterium, nach dem ausgewählt wurde, stochastisch unabhängig von dem Kriterium ist, dass ich abfrage. Wenn ich nur Menschen die über 190 cm groß sind, nach ihren Lieblingskinofilmen frage, ist das repräsentativ, wenn ich nach ihren Lieblingsplätzen im Kino frage, dann nicht.

Fachbegriffe Kapitel 14 und 15, Alternativ- und Signifikanztest - fünfte und letzte Woche

Stichprobe - die zufällige Entnahme von n Dingen aus einer größeren Gesamtheit, um Rückschlüsse auf die Gesamtheit zu bekommen.

Alternativtest - ein Test, bei dem nach einer vorgegebenen Regel, aufgrund der Stichprobe entschieden wird, welche von zwei Alternativen für die Gesamtheit gilt.

Irrtumswahrscheinlichkeit - Wahrscheinlichkeit, mit der - falls der Test durchgeführt wird - falsch entschieden wird. Muss unter 50% liegen, sonst braucht es keinen Test.

Signifikanztest - das Suchen nach einer Entscheidungsregel, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine alte bewährte Hypothese (Nullhypothese) irrtümlich abgelehnt wird, unter einem festen Wert liegt. Dieser Wert heißt Signifikanzniveau und liegt oft bei 5%.

Alphafehler - der Fehler, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird; er wird beim Signifikanztest unter das Signifikanzniveau gedrückt.

Betafehler - der Fehler, dass ich die Nullhypothese toleriere, obwohl eine andere Hypothese richtig ist. Kann nur bestimmt werden, wenn die Entscheidungsregel vorliegt.

Valide - wahrheitsgemäß. Eine Umfrage ist nur valide, wenn auch das gefragt wird, was gefragt werden soll.

Repräsentativ - Eine Umfrage ist nur repräsentativ, wenn die befragte Gruppe sich in dem Merkmal, welches gefragt wird, nicht von der Gesamtheit unterscheidet. Dies gilt immer, wenn einfach zufällig aus der Gesamtheit ausgewählt wird.

Arbeitsblatt Stochastik 5 - Der Alternativ- und der Signifikanztest

1. Bei der Produktion von Barbiepuppen erhöht sich aufgrund eines Maschinenversagens die Ausschussquote an einem Tag von 10% auf 30%. Eine Kiste wurde nicht ausgezeichnet, und man rätselt, was zu tun sei. Verkauft man die Kiste als B-Ware (30% defekt) bekommt man dafür nur 1000€, im Gegensatz zur A Ware (10% defekt), für die man 1500€ bekommt. Verkauft man irrtümlich B Ware als A Ware bekommt man eine Reklamation (10000 €, nichts für die Kiste). Beschreiben Sie, was der Händler tun kann, und wie ihm die Stochastik hier zur Seite steht.

2. Testen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeiten beim Test der unbekannten Barbiekiste mit Stichprobenumfang n, bei der es sich um A-Ware (10% Ausschusquote) oder um B-Ware (30% Ausschusquote) handeln kann.

n	Entscheidungsregel	P(“Irrtümlich A“)	P(„Irrtümlich B“)
a) 100	0-20 für A 21-100 für B		
b) 100	0-14 für A 15-100 für B		
c) 100	0-23 für A 24-100 für B		
d) 200	0-40 für A 41-200 für B		
e) 10	0-2 für A 3-10 für B		

3. In einem Molkereibetrieb wird Fruchtjoghurt hergestellt und in Becher abgefüllt. Einer Handelskette wurde vertraglich zugesichert, dass maximal 1% der Becher einen defekten Deckel besitzen. Normalerweise kann dieser Qualitätsstandard leicht eingehalten werden. Eines Tages stellt sich bei einer Qualitätskontrolle in der Molkerei heraus, dass 4% der Joghurtbecher einen defekten Deckel aufweisen. Bei einem schon beladenen Lkw ist ungewiss, ob die Joghurtbecher bereits aus der Produktion mit dem erhöhten Anteil an defekten Deckeln stammen. Deshalb wird der Ladung eine Stichprobe entnommen und untersucht.

a) Falls bei einer Stichprobe aus 100 Bechern mindestens zwei Becher einen defekten Deckel haben, wird der Lkw in der Molkerei wieder entladen, andernfalls wird die Lieferung freigegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung freigegeben wird, obwohl sie einen erhöhten Anteil an Joghurtbechern mit defektem Deckel aufweist?

4. Für die Abschätzung der Zuschauerquote werden 200 repräsentativ ermittelte Personen befragt. Sollten weniger als 25% davon die Quizshow gesehen haben, so soll diese abgesetzt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Quizshow abgesetzt wird, obwohl in Wirklichkeit die Zuschauerquote bei 30% liegt.

5. 25% aller Menschen ist das neue Fitnesscenter „Schlankheitswahn“ bekannt. Eine Werbeagentur wird vom Fitnesscenter damit beauftragt den Bekanntheitsgrad durch Internetwerbung zu steigern. Nach Angabe der Agentur kennen nun 50% der Leute das „Schlankheitswahn“. Um zu testen, dass die Agentur nicht geschlampt hat führt das Fitnesscenter einen Schnelltest in einem Fastfood Restaurant durch. Es werden 10 Personen befragt. Nur wenn 4 oder mehr Menschen das „Schlankheitswahn“ kennen bezahlen sie die Werbeagentur.

a) Mit welcher Wkt. wird die Agentur bezahlt, obwohl Sie überhaupt nichts getan hat?
b) Mit welcher Wkt. wird die Agemtur nicht bezahlt, obwohl ihre Angaben richtig sind?
c) Wie beurteilen Sie den Schnelltest?

1. Testen Sie die folgenden Hypothesen zum Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau SN

Nullhypothese	n	SN	Entscheidungsregel
a) „Mindestens 80% für Bio Produkte“	50	5%	
b) „Mindestens 3% Nebenwirkungen“	200	1%	
c) „Höchstens 2% Computerspielsüchtig“	100	5%	
d) „Höchstens 20% lesen Romane“	25	10%	

2. Die Vorsitzende des Fördervereins möchte der Schule einen neuen Schulgarten aus den Mitteln des Vereins finanzieren. Sie geht dabei von einer Zustimmungsquote von 60% unter den Schülern aus. Der Kassenwart spricht sich gegen die Finanzierung aus, da er mit einer Zustimmungsquote von höchstens 40% rechnet. Er schlägt eine Befragung von 50 zufällig ausgewählten Schülern vor. Seine Behauptung (Nullhypothese) soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich verworfen werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art unter der Annahme, dass die Vorsitzende mit ihrer Behauptung bezüglich der Zustimmungsquote Recht hat.

3. Ein Stadionsprecher behauptet, dass seit der Fußball-WM im eigenen Land die Fußballbegeisterung in der Stadt gestiegen sei und mindestens 80% der Einwohner dieser Stadt für einen Ausbau des Stadions seien.
a) Um diese Behauptung zu testen, befragen die Schüler in der Halbzeitpause 100 zufällig ausgewählte Zuschauer. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Schüler die Behauptung des Stadionsprechers (Nullhypothese) mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% irrtümlich ablehnen wollen?
b) Bewerten Sie den von den Schülern durchgeführten Test hinsichtlich seiner Eignung, die Behauptung des Stadionsprechers zu überprüfen.

4. Ein Kopiergerät wurde repariert. Die mit der Reparatur beauftragte Firma behauptet, dass die Ausschussquote jetzt nur noch höchstens 4% beträgt. Um diese Behauptung (Nullhypothese) auf dem Signifikanzniveau von 5% zu testen, werden 200 Kopien angefertigt.

a) Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
b) Bei dem Test erweisen sich 13 Kopien als unbrauchbar. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe 6a entworfenen Tests.
c) Die Modellannahme, das Anfertigen von Kopien sei eine Bernoulli-Kette, kann in der Realität unzutreffend sein. Erläutern Sie dies anhand eines Beispiels.

Hier drunter liegt das
ultimative Stochastik-Script
zum bayrischen G8 Abitur

Jedes Buch, das kürzer ist vermittelt nicht den ganzen Stoff!

Jedes Buch, das länger ist vermittelt zu viel Stoff!

Folgendes brauchen Sie weiterhin zum Mathematikabitur

Tafelwerk
Taschenrechner, am Besten den grauen Casio mit der anthrazitoberfläche
Merkhilfe
Buntstifte, Bleistift
Tablet für Funktionsplotten
Humor
(natürlich haben Sie keine Chance,
wo kommen wir denn hin, wenn Leute wie Sie Abitur haben)
Zeit und Ruhe (klingt komisch, is aber so)

Verhaltenstipps
Falsch: Ich kann mich grad nicht konzentrieren, ich schau mir das zuhause nochmal an (ha, ha). Ich muss das alles grundlegend nacharbeiten, bevor ich irgendwas verstehe. (Einfach Quatsch). Ich geh in die Stabi zum lernen (zwei Stunden Weg vorloren, keiner da zum Nachfragen). Ich mach Stochastik nicht, ich konzentrier mich auf die beiden anderen Sparten (Ich kann Autofahren, nur abiegen lass ich immer weg). Ich kann nur mit dem Nachhilfelehrer arbeiten. (Ich lass mich nochmal berieseln). Ich will im Abitur unbedingt alles bearbeiten. (Setzen Sie Prioritäten). Ganz oder garnicht.
Richtig: Ich hasse Mathematik. (Es ist auch ein hartes Fach, dazu da auszuselektieren). Ok, ich bleib noch 10 min und mach noch eine Aufgabe. (10min sind immerhin 10 min). Scheiße ich hab verschlafen, ich geh aber noch zum Nachmittagsunterricht. (Besser halb, als gar nicht.) Können sie es nochmal erklären, ich versteh es immer noch nicht. (Keine Scham, das Zeug ist auch sau abstrakt). OMG, das können die doch nicht machen (Doch können sie). Fuck, fuck, fuck! (Je schneller sie verzweifeln, desto eher wir ihnen klar, worauf sie sich eingelassen haben, für wohlerzogene Menschen: Schlimm, schlimm, schlimm.) Ich mach nur die leichten Aufgaben, die schweren lass ich weg. (Ja das ist ein Anfang).